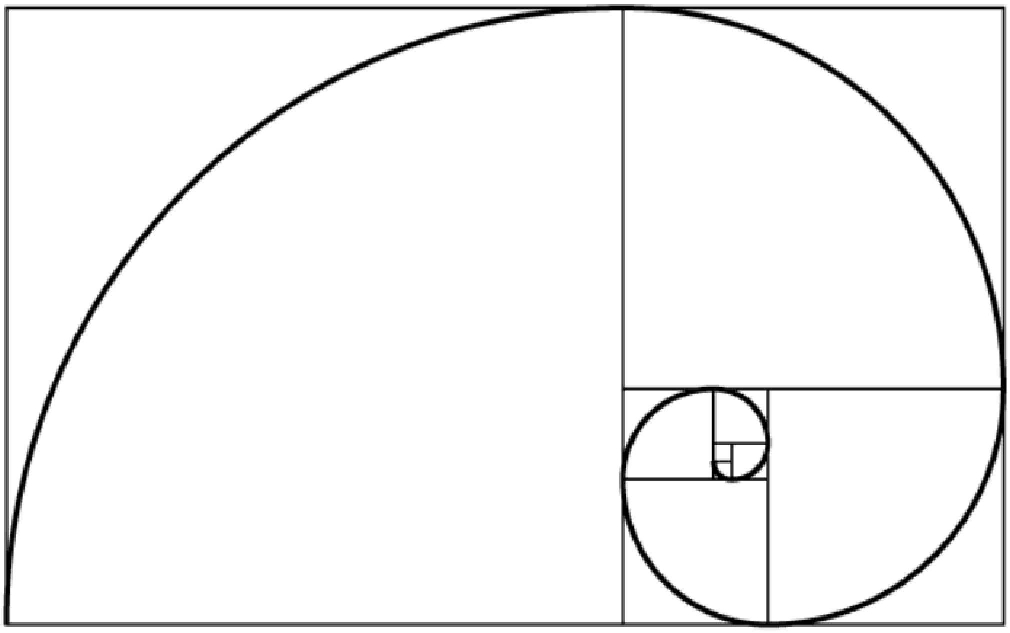
Formelsammlung Mathematik:
Analysis, Lineare Algebra und Finanzmathematik



$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Typeset in LaTeX

Inhaltsverzeichnis

1 Analysis

1.1 Rechnen mit reellen Zahlen und Funktionen

1.1.1 Potenzen und Binomische Formeln

Multiplizieren	$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	Dividieren	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$
Multiplizieren	$x^a \cdot y^a = (x \cdot y)^a$		
Potenzieren	$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$	Dividieren	$\frac{x^a}{y^a} = \left(\frac{x}{y}\right)^a$

1. Binomische Formel $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

2. Binomische Formel $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

3. Binomische Formel $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

1.1.2 Wurzeln, natürlicher Logarithmus und allgemeine Potenzen

(natürliche) Wurzeln	$y = f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow y^n = x \quad$ mit $x \geqslant 0$ für n gerade
Potenzieren von Wurzeln	$(\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$
natürlicher Logarithmus	$y = f(x) = \ln x \Leftrightarrow e^y = x \quad$ für $x > 0$
allgemeine Potenzen	$y = f(x) = x^a = e^{a \cdot \ln x} \quad$ für $x > 0$ und $a \in \mathbb{R}$
allgemeine Potenzen	$y = x^a \Leftrightarrow a = \frac{\ln y}{\ln x}$
Logarithmus von Potenzen	$\ln(x^a) = a \cdot \ln x$
Logarithmus von Produkten	$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$
Logarithmus von Quotienten	$\ln(x/y) = \ln x - \ln y$

1.2 Spezielle Funktionen

1.2.1 Quadratische Funktionen (Parabeln)

Parabeln $y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (1 \cdot x^2 + p \cdot x + q) \quad$ mit $a \neq 0$

Nullstellen $x_1, x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot a} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q} \quad$ für $b^2 \geqslant 4ac$ bzw. $p^2 \geqslant 4q$

Produktform $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \quad$ mit Nullstellen x_1, x_2 von f

1.2.2 Ökonomische Funktionen

Angebotsfunktion	$p_A(x)$ als Preis p in Abhängigkeit von Menge x
Nachfragefunktion	$x(p)$ als Menge x in Abhängigkeit von Preis p bzw. umgekehrt $p(x)$
Erlös oder Umsatz	$E(x) = x \cdot p(x)$
Kostenfunktion	$K(x) = K_v(x) + K$ mit $K_v(x)$ variablen Kosten und K fixen Kosten
Gewinnfunktion	$G(x) = E(x) - K(x)$
Konsumentenrente	$K_R = \int_0^{x_0} p(x)\,dx - p_0 \cdot x_0$ im Marktgleichgewicht (x_0, p_0)
Produzentenrente	$P_R = p_0 \cdot x_0 - \int_0^{x_0} p_A(x)\,dx$ im Marktgleichgewicht (x_0, p_0)

1.2.3 Homogene Funktionen

Eine Funktion $f(x, y)$ heißt **homogen vom Grad r**, wenn für jede reelle Zahl λ gilt:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^r \cdot f(x, y)$$

1.3 Differenzialrechnung

1.3.1 Ableitungsregeln

Multiplizieren mit Konstanten	$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \quad \text{für } c \in \mathbb{R}$
Summenregel	$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
Produktregel	$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
Kettenregel	$\Big(f(g(x))\Big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Ableitung der Potenzfunktion	$(x^a)' = a \cdot x^{a-1} \quad \text{für } a \in \mathbb{R}$
Ableitung der Exponentialfunktion	$\left(e^x\right)' = e^x$
Ableitung der Logarithmusfunktion	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

1.3.2 Elastizität

Elastizitätsfunktion
von $f(x)$ bezüglich x

$$\varepsilon_{f,x}(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x$$

Elastizitätsfunktion
von $f(x, y)$ bezüglich x bzw. y

$$\varepsilon_{f,x}(x, y) = \frac{f_x(x, y)}{f(x, y)} \cdot x \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_{f,y}(x, y) = \frac{f_y(x, y)}{f(x, y)} \cdot y$$

1.3.3 Extremwerte eindimensionaler Funktionen

Für eine zweimal bzw. dreimal in x_0 differenzierbare Funktion $f(x)$ gilt:

$$x_0 \text{ ist ein } \begin{cases} \textbf{lokales Maximum} \text{ von } f(x) & \text{falls} \quad f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) < 0 \\ \textbf{lokales Minimum} \text{ von } f(x) & \text{falls} \quad f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) > 0 \\ \textbf{Wendepunkt} \text{ von } f(x) & \text{falls} \quad f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

1.3.4 Extremwerte zweidimensionaler Funktionen

Es sei $f(x, y)$ eine zweidimensionale Funktion, für die alle zweiten partiellen Ableitungen existieren und deren erste partielle Ableitungen f_x und f_y jeweils im Punkte (x_0, y_0) verschwinden:

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Wird aus den zweiten partiellen Ableitungen die Determinante der Hessematrix gebildet, d.h.

$$H(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y) \cdot f_{yx}(x, y)$$

so gilt:

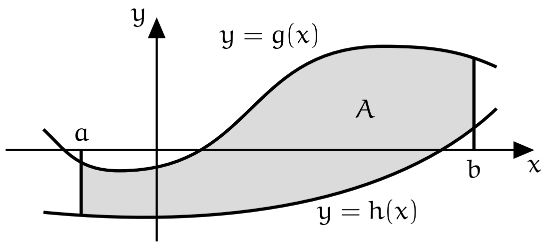
$$(x_0, y_0) \text{ ist ein } \begin{cases} \textbf{lokales Maximum} \text{ von } f(x, y) & \text{falls} \quad H(x_0, y_0) > 0 \text{ und } f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \\ \textbf{lokales Minimum} \text{ von } f(x, y) & \text{falls} \quad H(x_0, y_0) > 0 \text{ und } f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \\ \textbf{Sattelpunkt} \text{ von } f(x, y) & \text{falls} \quad H(x_0, y_0) < 0 \end{cases}$$

1.3.5 Integration

Der Flächeninhalt A eines Gebiets, das unter einer Funktion $y = g(x)$ und über einer Funktion $y = h(x)$ (für h(x)=0 also über der x-Achse) zwischen den Senkrechten $x = a$ und $x = b$ eingeschlossen wird, berechnet sich mithilfe von $f(x) = g(x) - h(x)$ durch das **Integral**

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

worin $F(x)$ eine **Stammfunktion** der Funktion $f(x)$ also $F'(x) = f(x)$ ist.



Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
x^a für $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1}$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\ln x$
e^x	e^x

1.3.6 Optimierung einer zweidimensionalen Funktion mit Nebenbedingung

Das Optimum einer Funktion $f(x, y)$ unter einer Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ ergibt sich aus den gemeinsamen Nullstellen der partiellen Ableitungen der dreidimensionalen **Lagrangefunktion**

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$$

2 Lineare Algebra

Ein **lineares Gleichungssystem** $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

mit einer $n \times n$ Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ und Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

hat genau dann eine eindeutige Lösung $\vec{x}$, wenn $\det(A) \neq 0$. Im Falle von $\det(A) \neq 0$ ergeben sich die einzelnen Komponenten des Lösungsvektors $\vec{x}$ aus der **Cramer'schen Regel**

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)} \quad \text{für } k = 1, \ldots, n$$

worin A_k die Matrix A ist, in der die k-te Spalte durch $\vec{b}$ ersetzt wurde.

Die **Determinante** $\det(A)$ einer 2×2 Matrix A ist $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ und die Determinante einer 3×3 Matrix ist mit **Laplace-Entwicklung** nach der ersten Zeile

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Die **Einheitsmatrix** ist die Matrix E, in der $a_{11} = a_{22} \ldots = a_{nn} = 1$ und alle anderen Werte Null sind. Im Falle von $\det(A) \neq 0$ existiert eine **inverse Matrix** A^{-1} zu A mit $A^{-1} \cdot A = E$ und die eindeutige Lösung $\vec{x}$ des linearen Gleichungssystems $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ergibt sich aus $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$. Die inverse Matrix einer 2×2 Matrix A ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

3 Finanzmathematik

Fortan sind p der **Prozentzinssatz**, $i = \frac{p}{100}$ der **Zinssatz** und $q = 1 + i$ der **Zinsfaktor** *pro Jahr*.

3.1 Zinsrechnung

Verzinsung	Endwert K_n	Barwert K_0	Zinssatz i	Laufzeit / Zinstermine n
linear **einfach**	$K_0 \cdot (1 + i \cdot n)$	$\frac{K_n}{1 + i \cdot n}$	$\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{K_n}{K_0} - 1\right)$	$\frac{1}{i} \cdot \left(\frac{K_n}{K_0} - 1\right)$
exponentiell **Zinseszins**	$K_0 \cdot q^n$	$K_n \cdot q^{-n}$	$\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$	$\frac{1}{\ln q} \cdot \ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)$
stetig	$K_0 \cdot e^{i \cdot n}$	$K_n \cdot e^{-i \cdot n}$	$\frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)$	$\frac{1}{i} \cdot \ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)$

Für **unterjährige exponentielle Verzinsung** bei m unterjährigen Zinsperioden und n Zinsterminen ist in den Formeln der Zinsfaktor q durch den **unterjährigen Zinsfaktor** q_{rel} bzw. q_{kon} zu ersetzen:

unterjährige Verzinsung mit m Zinsperioden	unterjähriger Zinsfaktor	Effektivzinsfaktor
relativ	$q_{\text{rel}} = 1 + \frac{i}{m}$	$q_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$
konform	$q_{\text{kon}} = \sqrt[m]{q}$	q

Der Effektivzinsfaktor ist der Jahreszinsfaktor, der einer Verzinsung mit dem unterjähigen oder dem stetigen Zinssatz für ein volles Jahr entspricht. Der Effektivzinsfaktor der stetigen Verzinsung ist e^i.

Für die **unterjährige lineare Verzinsung** bei $t_1 < 360$ Zinstagen im ersten und $t_3 < 360$ Zinstagen im letzten Zinsjahr sowie exponentieller jährlicher Verzinsung in n dazwischen liegenden vollen Zinsjahren errechnet sich der Endwert K_x für die insgesamt $x = t_1 + n \cdot 360 + t_3$ Zinstage durch die **gemischte Verzinsung**

$$K_x = K_0 \cdot \left(1 + t_1 \cdot \frac{i}{360}\right) \cdot (1 + i)^n \cdot \left(1 + t_3 \cdot \frac{i}{360}\right)$$

3.2 Rentenrechnung

3.2.1 Zusammenfallen von Raten- und Zinstermin

Rentenart	Endwert R_n	Barwert R_0	Rate r	Laufzeit / Zinstermine n
nachschüssig	$r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$	$r \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q-1)}$	$R_n \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1}$	$\frac{\ln\left(1 + \frac{R_n \cdot (q-1)}{r}\right)}{\ln q}$
	$R_0 \cdot q^n$	$R_n \cdot q^{-n}$	$R_0 \cdot \frac{q^n \cdot (q-1)}{q^n - 1}$	$\frac{-\ln\left(1 - \frac{R_0 \cdot (q-1)}{r}\right)}{\ln q}$
nachschüssig **ewig**	n.a.	$r \cdot \frac{1}{q - 1}$	$R_0 \cdot (q - 1)$	n.a.

Zur Berechnung der Werte für eine **vorschüssige** Rente ist jeweils r durch $r \cdot q$ auszutauschen.

Bei m unterjährigen Zinsperioden und n Zinsterminen ist statt q in den Formeln q_{rel} bzw. q_{kon} setzen.

3.2.2 Auseinanderfallen von Raten- und Zinstermin

Rentenperiode > Zinsperiode (jährliche Raten und unterjährige Verzinsung)
Der Endwert R_n einer Rente mit n nachschüssigen Jahresraten r, die jeweils m mal unterjährig verzinst werden, ergibt sich mit $q = q_{\text{eff}} = q_{\text{rel}}^m$ aus der Rentenformel

$$R_n = r \cdot \frac{q_{\text{eff}}^n - 1}{q_{\text{eff}} - 1}$$

Zinsperiode > Rentenperiode (unterjährige Raten und jährliche Verzinsung)
Der Endwert R_n einer Rente mit m unterjährigen, nachschüssigen Raten r und n Zinsterminen folgt mit $q = q_{\text{kon}}$ aus der Rentenformel

$$R_n = r \cdot \frac{q_{\text{kon}}^n - 1}{q_{\text{kon}} - 1}$$

3.3 Tilgungsrechnung

Fortan bezeichne S die **Anfangsschuld** und ferner A_k die **Annuität**, Z_k die **Zinsen**, T_k die **Tilgung** und R_k die **Restschuld** jeweils am Ende des k-ten Jahres (Berichtsjahres) für $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Generell gilt für alle Tilgungsarten:
Annuität im Berichtsjahr ist Summe der Zinsen und Tilgung im Berichtsjahr: $A_k = Z_k + T_k$.
Restschuld im Berichtsjahr ist Vorjahreswert minus Tilgung im Berichtsjahr: $R_k = R_{k-1} - T_k$.
Zinsen im Berichtsjahr berechnen sich aus Restschuld des Vorjahrs: $Z_k = R_{k-1} \cdot i$, wobei $R_0 = S$.

Tilgungsart	Annuität A_k	Zinsen Z_k	Tilgung T_k	Restschuld R_k
Raten $T_k = T$ konstant	$T \cdot ((n-k+1) \cdot i + 1)$	$T \cdot (n-k+1) \cdot i$	$\mathbf{T} = S/n$	$T \cdot (n-k)$
Annuitäten $A_k = A$ konstant	$\mathbf{A} = S \cdot \frac{q^n \cdot (q-1)}{q^n - 1}$	$A \cdot (1 - q^{k-n-1})$	$A \cdot q^{k-n-1}$	$A \cdot \frac{1 - q^{k-n}}{q-1}$

Mit $r = A$ und $R_0 = S$ folgt aus der Laufzeit bei Renten die Laufzeit bei Annuitätentilgung:

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{S \cdot (q-1)}{A}\right)}{\ln q}$$

3.4 Investitionsrechnung

Für (positive oder negative) Zahlungen $A_0, A_1, \ldots, A_n$ in den Perioden $0, 1, \ldots, n$ ergeben sich

Barwert (Kapitalwert) $\quad K_0 = A_0 \cdot q^0 + A_1 \cdot q^{-1} + A_2 \cdot q^{-2} + \ldots + A_n \cdot q^{-n}$

Endwert (Endvermögensdifferenz) $\quad K_n = A_0 \cdot q^n + A_1 \cdot q^{n-1} + A_2 \cdot q^{n-2} + \ldots + A_n \cdot q^0$

Vom Bar- zum Endwert und umgekehrt $\quad K_n = K_0 \cdot q^n \quad$ und $\quad K_0 = K_n \cdot q^{-n}$

Eine Investition ist rentabel, wenn der Barwert oder Endwert positiv ist oder wenn die **äquivalente Annuität**, die sich aus $K_0 = S$ ergibt, positiv ist. Verschiedene Investitionen mit gleichem Anfang sind durch ihre Bar- oder Endwerte vergleichbar und, falls sie auch gleich lang sind, zusätzlich durch ihre äquivalenten Annuitäten.

Eine **Normalinvestition** ist eine Zahlungsreihe, die aus einer einzigen Investition $A_0 < 0$, gefolgt von Renditen $A_1 \geqslant 0, \ldots, A_n \geqslant 0$ besteht, die insgesamt die Investition übersteigen: $A_1 + \ldots + A_n > -A_0$.

Der **interne Zinssatz** i einer Normalinvestition ist die eindeutige Nullstelle $q = 1 + i$ von $K_n(q) = 0$ und kann iterativ mit der **Newton-Methode** berechnet werden:

$$q_1 = 1 \quad \text{und} \quad q_{k+1} = q_k - \frac{K_n(q_k)}{K_n'(q_k)} \quad \text{für } k = 1, 2 \ldots$$

Eine Normalinvestition ist profitabel, wenn der interne Zinssatz über dem Kalkulationszinssatz liegt.