Übungsklausur 1

Zugelassene Hilfsmittel:
Klausurpapier, nichtprogrammierbarer, nichtgrafikfähiger Taschenrechner
(Die hier angehängte Formelsammlung wird Ihnen in der Klausur in identischer Form ausgehändigt)

Aufgabe 1) (6 Pkt.)

Sie legen am 20.1.2019 insgesamt 50.000 € an, um davon am 3.1.2022 Ihre Hypothek abzubezahlen. In 2019 erhalten Sie 4% Zinsen, von 2020 bis 2022 erhalten Sie 5% Zinsen. Wie viel Kapital erhalten Sie, wenn Sie die erhaltenen Zinsen am Jahresende automatisch wiederanlegen?

Aufgabe 2) (4 Pkt.)

Eine Kapitalanlage mit jährlicher Verzinsung hat sich in 30 Jahren verdreifacht. Im ersten Drittel der Laufzeit betrug der Zinssatz 3%, im zweiten Drittel 4% Wie hoch war der Zinssatz im letzten Drittel?

Aufgabe 3) (4 Pkt.)

Wie lange braucht eine Kapitalanlage, um sich bei einem Zins von 4% zu verdoppeln?

Aufgabe 4) (6 Pkt.)

Eine Bank bietet für beliebige Anlagebeträge (z.B. 5.000 €) folgende Geldanlage an: Nominalzins = 4%, zusätzliche Gebühren (Aufschlag) = 1%, Laufzeit 6 Monate. Wie hoch ist der Effektivzins?

Aufgabe 5) (10 Pkt.)

Wie viel Geld (r_1) können Sie pro Monat nachschüssig sparen? Bitte treffen Sie geeignete Annahmen über Ihr aktuelles Alter n_1, die Lebenserwartung n_2, sowie den Zinssatz ($i \neq 0\%$) und berechnen Sie die vierteljährlich vorschüssige Rente r_2, die Sie aufgrund der Ersparnis ab Ihrem 67. Lebensjahr erwarten können.

Aufgabe 6) (6 Pkt.)

Berechnen Sie für nachstehende Produktionsverflechtung der Abteilungen A und B sowie gegebene primäre Kosten die kostendeckenden innerbetrieblichen Verrechnungspreise.

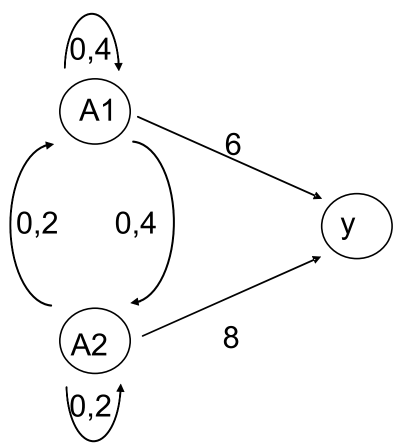
		Empfänger A	Empfänger B	Hauptbetrieb	Gesamt -leistung	Primäre Kosten
Lieferant	A	5	8	30	43	146
	B	3	1	20	24	14

Aufgabe 7) (12 Pkt.)

Ein Unternehmen produziert mit 2 Abteilungen A1, A2 gemäß nebenstehendem Gozintographen. Die Zahlen an den Pfeilen zwischen den Abteilungen beschreiben den Verbrauch **pro produzierter Abteilungseinheit**, die Zahlen an den Pfeilen zum Endprodukt den Endverbrauch.

a) Wie groß muss der Output der Abteilungen sein, um als Unternehmen die ME $y^T=(y_1,y_2)=(6,8)$ für den Endverbrauch herzustellen?

b) Angenommen, die beiden Abteilungen A1 und A2 produzieren jeweils 40 ME. Wie viele Einheiten können dann in den Endverbrauch (y) gehen?



Übungsklausur 1 (Forts.)

Aufgabe 8) (8 Pkt.)

Ein Unternehmen (mit Marktmacht) weiß aus Erfahrung, dass der erzielte Preis *P* abhängig von der verkauften Menge *x* gemäß folgender Preisabsatzfunktion ist: $P(x)=25-2x$. Die Kosten lassen sich darstellen durch $K(x)=x^3-7x^2+21x+20$

a) Bestimmen Sie Erlös- und Gewinnfunktion.

b) Wo liegt die Break-Even (BE) Gewinnschwelle? (x_1 = -2 sei eine bekannte Nullstelle)

Aufgabe 9) (8 Pkt.)

Bilden Sie die Ableitung der Funktion $f(x)=\ln(e^{3x+2})$.

Aufgabe 10) (10 Pkt.)

Betrachten Sie ein Unternehmen ohne Marktmacht, welches sich einem Preis $P=10$ und Kosten $K(x)=x^2+16$.gegenübersieht.

a) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion und die Break-Even-Menge.

b) Bestimmen Sie die gewinnmaximale Menge und den maximalen Gewinn.

c) Wo liegt das Betriebsoptimum (Minimum der DK)?

Aufgabe 11) (8 Pkt.)

Bestimmen Sie Maximum, Minimum oder Sattelpunkt von der Funktion

$f(x,y) = 10x^2 + 4x - 2y^2 + 64y - 16xy + 6$.

Aufgabe 12) (8 Pkt.)

Wie hoch sind Gleichgewichtspreis und -menge, Konsumenten- und Produzentenrente für die nachfolgende Nachfrage- (P^N) und Angebotsfunktion (P^A)?

$P^N(x) = 30 - 2{,}5x$; $P^A(x) = 5x$.

Übungsklausur 2

Zugelassene Hilfsmittel:
Klausurpapier, nichtprogrammierbarer, nichtgrafikfähiger Taschenrechner
(Die hier angehängte Formelsammlung wird Ihnen in der Klausur in identischer Form ausgehändigt)

Aufgabe 1) (8 Pkt.)

Eine Rechnung über 4.300 € wird innerhalb eines Jahres nicht bezahlt. Daher sind Verzugszinsen in Höhe von 64,50 € zu zahlen. Für welche Zeitspanne in Tagen wurden die Verzugszinsen berechnet, falls der zugrunde liegende Zins 4,5% betrug?

Aufgabe 2) (8 Pkt.)

Bestimmen Sie den internen Zinsfuß der folgenden Anfangsinvestition Z_0=500, die in den beiden Folgejahren zu Rückzahlungen von Z_1 = 260 und Z_2 =280 führt.

Aufgabe 3) (10 Pkt.)

Wie viel Rente r_2 wollen Sie ab Ihrem 67. Lebensjahr monatlich nachschüssig bekommen? Bitte treffen Sie geeignete Annahmen über Ihr aktuelles Alter n_1, die Lebenserwartung n_2, sowie den Zinssatz ($i \neq 0\%$) und berechnen Sie die halbjährlich vorschüssige notwendige Ersparnis r_1.

Aufgabe 4) (4 Pkt.)

Sie nehmen einen Kredit über 20.000 € zu 4% Zins auf, der mit gleichbleibenden Annuitäten in 30 Jahren zu tilgen ist. Berechnen Sie Annuität, Zinsen und Tilgung im 10. Jahr sowie die Restschuld nach dem 10. Jahr.

Aufgabe 5) (10 Pkt.)

Eine Unternehmung produziert mit den Produktionsfaktoren F_1, F_2, F_3 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2, gemäß der Produktionskoeffizienten in A und mit diesen Zwischenprodukten die beiden Endprodukte $E=(E_1, E_2)^T$ gemäß der Produktionskoeffizienten in B. Wie hoch ist der Gewinn für gegebenes E sowie gegebene Preise P_F, P_E von F und E?

$$A=\begin{pmatrix} ¿3 & ¿1 \\ ¿2 & ¿2 \\ ¿1 & ¿3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}, P_F=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, P_E=\begin{pmatrix} 40 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6) (8 Pkt.)

Bitte lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem und berechnen Sie mit dem Gaußverfahren die Inverse von A:

$Ax=b$ mit $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ und $b=\begin{pmatrix} ¿1 \\ ¿2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 7) (8 Pkt.)

Bestimmen Sie für die Preisabsatzfunktion (Nachfragefunktion) $P(x)=e^{-0,5x^2}$ die „Preiselastizität der Nachfrage“ an der Stelle x = 0,5.

Übungsklausur 2 (Forts.)

Aufgabe 8) (10 Pkt.)

Bestimmen Sie für die Funktion $f(x)=x^2(x-3)-24x$ die Maxima, Minima, Wende- und Sattelpunkte.

Aufgabe 9) (10 Pkt.)

Betrachten Sie ein Unternehmen mit Marktmacht, welches sich einer Marktnachfrage $P(x)=100-6x$ sowie Kosten $K(x)=2x^2+36x+120$ gegenübersieht. Berechnen Sie

a) die Break-Even-Menge,

b) für das Gewinnmaximum Menge, Preis, Gewinn und Durchschnittskosten.

Aufgabe 10) (8 Pkt.)

Gegeben sei die Nutzenfunktion $U(x_1, x_2)=8x_1+4x_2+2x_1x_2+8$, die abhängig ist von den Mengen x_1 und x_2 der Güter 1 und 2, das Haushaltseinkommen Y = 60 und die Preise zweier Konsumgüter P_1 = 2 und P_2 = 4. Berechnen Sie das nutzenmaximale Güterbündel im Optimum?

Aufgabe 11) (6 Pkt.)

Berechnen Sie: $\int_{20}^{24}$ ¿¿.

Formelsammlung

1. Zinsrechnung

1.1. Unterjährige einfache Verzinsung:

Berechnung der Tage im Jahr

T_i = (aktueller Monat − 1) · 30 + Tag im Monat

Zinsformel

$$K_t=K_0\left(1+i\cdot\frac{T_2-T_1}{360}\right)$$

1.2. Zinseszinsformeln

für n ganze Zinsperioden

$$K_n=K_0(1+i)^n=K_0\,q^n$$

gemischte Verzinsung

$$K_t=K_0(1+i\cdot t_1)(1+i)^n(1+i\cdot t_2)$$

nicht ganzzahlige Hochzahl

$$K_t=K_0(1+i)^t$$

Unterjährige Verzinsung mit Zinseszinsen

relative Periodenzinsrate i^* mit $i^* = i_{nom}/m$

$K_s=K_0$¿

die zu i_{nom} konforme Periodenzinsrate i'

$$(1+i')^m=(1+i_{nom})$$

effektive Zinsrate

$$i_{eff}=\left(1+\frac{i_{nom}}{m}\right)^m-1$$

Stetige Verzinsung

$$K_t=K_0\,e^{i\cdot t}$$

1.3. Barwerte (Gegenwartswerte)

unterjährig

$$K_0=\frac{K_t}{1+i\cdot\frac{T_2-T_1}{360}}$$

von n ganzen Perioden

$$K_0=\frac{K_n}{(1+i)^n}$$

eines nicht ganzzahligen Zeitraumes t

$$K_0=\frac{K_t}{(1+i)^t}$$

1.4. Lösung quadratischer Gleichung:

Gegeben: $x^2+px+q=0$ Lösung: $x_{1,2}=\frac{-p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$

2. Rentenrechnung

2.1. nachschüssige Renten

Endwert

$$R_n=r\,\frac{q^n-1}{q-1}$$

Barwert

$$R_0=r\,\frac{q^n-1}{q^n(q-1)}$$

Laufzeit aus Endwert

$$n=\frac{\ln\left(1+\frac{R_n\cdot i}{r}\right)}{\ln q}$$

Laufzeit aus Barwert

$$n=\frac{-\ln\left(1-\frac{R_0\cdot i}{r}\right)}{\ln q}$$

Barwert ewiger Rente

$$R_0=\frac{r}{i}$$

2.2. vorschüssige Renten

Endwert

$$R_n=r'\,q\,\frac{q^n-1}{q-1}$$

Barwert

$$R_0=r'\,q\,\frac{q^n-1}{q^n(q-1)}$$

Barwert ewiger Rente

$$R_0=r'+\frac{r'}{i}$$

2.3. unterjährige Renten

Konforme jährliche nachschüssige Ersatzrentenrate r_e einer unterjährig...

...nachschüssigen Rente r

$$r_e=r\cdot\left(m+\frac{(m-1)}{2}\,i\right)$$

...vorschüssigen Rente r

$$r_e=r\cdot\left(m+\frac{(m+1)}{2}\,i\right)$$

3. Tilgungsrechnung

3.1. Konstante Annuitäten (vollständige Rückzahlung nach *n* Jahren)

Konstante Annuitäten

$$A=S\,\frac{q^n(q-1)}{q^n-1}$$

Zinsen

$$Z_k=A\cdot\left(1-q^{k-1-n}\right)$$

Tilgung

$$T_k=A\,q^{k-1-n}$$

Restschuld (zu Beginn des k-ten Jahres)

$$R_k=S\,\frac{q^n-q^{k-1}}{q^n-1}$$

3.2. Konstante Annuitäten (teilweise Rückzahlung nach *n* Jahren, *A* gegeben)

Tilgung

Zinsen

Restschuld (zu Beginn des k-ten Jahres)

Laufzeit zur vollständigen Tilgung

$T_k=(A-S\cdot i)\cdot q^{k-1}$ $\quad Z_k=A-T_k$ $\quad R_k=\frac{Z_k}{i}$ $\quad n=\frac{-\ln(1-S\cdot i/A)}{\ln(¿q)¿}$

3.3. Konstante Tilgungsquote (Laufzeit *n* Jahre)

Tilgungsquote bei vollst. Rückzahlung	Tilgungsquote ist gegeben	Restschuld zu Beginn des k-ten Jahres	Zinsquote Ende k. Jahr	Rate Ende k. Jahr
$T=T_k=S/n$	T	$R_k=S-(k-1)T$	$Z_k=R_k\cdot i$	$A_k=T+Z_k$

4. Lineare Algebra

Matrixmultiplikation

$A \cdot B = C = (c_{ij})_{m \times n}$ mit $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$

Determinante

$\text{Det}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$

Lösung lin. Gl.-System $Ax=b$: Umformen bis $Ex=A^{-1}b$

Berechnung inverse Matrix zu A: $Ax+Ey=0$ umformen bis $Ex+A^{-1}y=0$

Leontiefmodell: A sei die Direktverbrauchmatrix. $y=[E-A] \cdot x \quad x=[E-A]^{-1} \cdot y$

5. Differentialrechnung

Ableitung elementarer Funktionen

¿

Ableitungsregeln:

Summenr.: ¿; Produktr.: ¿;

Produktr. mit Konstante c: ¿; Quotientenr.: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$;

Kettenr.: $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Elastizität: $p = p(x)$ mit p = Preis und x = Menge; $x(p)$ sei die Umkehrfkt. zu $p(x)$;

Preis(p)-Elastizität der Nachfrage(x): $\varepsilon_{x,p} = x'(p) \cdot \frac{p}{x(p)} = \frac{1}{\varepsilon_{p,x}} = \frac{1}{p'(x) \cdot \frac{x}{p(x)}}$

6. Funktionen mehrerer Variablen

Optimierung f(x, y) ohne Nebenbed.: Gl.-System $f_x=0; f_y=0$ lösen und überprüfen:

Hesse-Matrix

$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$

Hinreichende Kriterien für…

$Max: f_{xx}<0; Det(H)>0$

$Min: f_{xx}>0; Det(H)>0$

$SP: Det(H)<0$

Optimierung f(x_1, x_2) unter Nebenbed. g(x_1, x_2) = 0: Setze Nebenbed. in *f* ein und optimiere.

Lagrangefunktion: L(x_1, x_2, λ)= f(x_1, x_2) + λ g(x_1, x_2): Löse Gl.-System der partiellen Abl..

7. Integralrechnung

Elementare Stammfunktionen

$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \, (\text{für } n \neq -1);$ $\int \frac{1}{x} dx = ¿$

$\int e^x \, dx = e^x + c;$ $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln(¿a) + c \, (\text{für } a>0 \text{ und } a \neq 1) ¿}$

Integrationsregeln:

$\int_a^b f(x)\,dx = ¿ F(x)|_a^b = F(b) - F(a); \int_a^a f(x)\,dx = 0; \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Analog zur Summenregel und zur Produktregel mit Konstante gilt:

$\int a \cdot f(x) + b \cdot g(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx + b \cdot \int g(x)\,dx;$

Analog zur Produktregel der Differentialrechnung gilt:

$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,dx;$

Substitutionsregel: Sei $z = m \cdot x + n$ eine lineare Substitution und $F'(z) = f(z)$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(m \cdot x+n)\,dx=\frac{1}{m}\int_{m \cdot a+n}^{m \cdot b+n} f(z)\,dz$$

Musterlösung Übungsklausur 1

Aufgabe 1) (6 Pkt.)

$$K_t = K_0(1+i\cdot t_1)(1+i)^n(1+i\cdot t_2) = 50.000\cdot\left(1+4\%\cdot\frac{341}{360}\right)(1+5\%)^2\left(1+5\%\cdot\frac{2}{360}\right) = 57.229{,}52$$

Aufgabe 2) (4 Pkt.)

$$3K_0 = K_0(1+i_1)^{10}(1+i_2)^{10}(1+i_3)^{10} \Leftrightarrow i_3 = \left(\frac{3}{(1+3\%)^{10}(1+4\%)^{10}}\right)^{1/10} - 1 = 4{,}19\%.$$

Aufgabe 3) (4 Pkt.)

$$2K_0 = K_0(1+4\%)^t \Leftrightarrow \ln 2 = \ln(1{,}04^t) \Leftrightarrow \ln 2 = t\ln 1{,}04 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}04} = 17{,}67\,\text{Jahre}.$$

Aufgabe 4) (6 Pkt.)

Wenn der anzulegende Betrag z.B. K_0 = 5.050 € ist, dann werden hiervon abzügl. der Gebühren $K_0/1{,}01$ zum Nominalzins von 4% angelegt und nach einem halben Jahr ergeben sich $\frac{K_0}{1{,}01}\left(1+\frac{4\%}{2}\right)$.

Der entprechende Halbjahreszins ist dann: $K_0(1+i') = \frac{K_0}{1{,}01}\left(1+\frac{4\%}{2}\right) \Leftrightarrow i' = \frac{1}{1{,}01}\left(1+\frac{4\%}{2}\right) - 1 = 0{,}99\%.$

Für den Effektivzins gilt dann: $i_{eff} = (1+i')^2 - 1 = 1{,}99\%.$

Aufgabe 5) (10 Pkt.)

Annahmen: r_1 = 200€, Lebenserwartung n_2 = 82 Jahre, aktuelles Alter n_1 = 22 Jahre, Zins i = 2%.

$$r_{e,1} = r_1\cdot\left[m+i\cdot\frac{m-1}{2}\right] = 200\cdot\left[12+2\%\cdot\frac{11}{2}\right] = 2.422{,}00;$$

$$R_n = r_{e,1}\frac{q^{67-n_1}-1}{q-1} = r_{e,1}\frac{q^{67-22}-1}{q-1} = 2.422\cdot\frac{1{,}02^{45}-1}{0{,}02} = 174.124{,}14$$

$$R_0 = r_{e,2}\frac{q^{n_2-67}-1}{q^{n_2-67}(q-1)} \Leftrightarrow r_{e,2} = R_0\frac{q^{n_2-67}(q-1)}{q^{n_2-67}-1} = 174.124{,}14\cdot\frac{1{,}02^{82-67}(1{,}02-1)}{1{,}02^{82-67}-1} = 13.551{,}29;$$

$$r_2 = \frac{r_{e,2}}{\left[m+i\cdot\frac{m+1}{2}\right]} = \frac{13.551{,}29}{\left[4+2\%\cdot\frac{4+1}{2}\right]} = 3.346{,}00.$$

Aufgabe 6) (6 Pkt.)

$$\begin{matrix}\text{I.}\ 146+5\cdot p_A+3\cdot p_B & \text{¿}\,43\cdot p_A \\ \text{II.}\ 14+8\cdot p_A+1\cdot p_B & \text{¿}\,24\cdot p_B\end{matrix} \Rightarrow \text{Lösung des GL: } p_A=4;\ p_B=2\begin{pmatrix}\text{Lösungsverf. muss}\\\text{gezeigt werden.}\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7) (12 Pkt.)

Direktverbrauchsmatrix *A, E-A* und $(E\text{-}A)^{-1}$:

$$A=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}4\\0{,}2 & 0{,}2\end{pmatrix};\ E-A=\begin{pmatrix}0{,}6 & -0{,}4\\-0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}\Rightarrow(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\0{,}5 & 1{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\textit{Gaussverfahren}\\\textit{muss gezeigt werden}\end{pmatrix};$$

a) $x=(E-A)^{-1}y=\begin{pmatrix}2 & 1\\0{,}5 & 1{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\15\end{pmatrix}$; b) $y=(E-A)x=\begin{pmatrix}0{,}6 & -0{,}4\\-0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}40\\40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\24\end{pmatrix}$.

Aufgabe 8) (8 Pkt.)

$$a\,\text{¿}\,G(x)=E(x)-K(x)=P(x)\cdot x-K(x)=(25-2x)\cdot x-(x^3-7x^2+21x+20)$$
$$\text{¿}\,25x-2x^2-x^3+7x^2-21x-20=-x^3+5x^2+4x-20;$$

b) Schritt 1: Polynomdivision

Schritt 2: Lösung quadratischer Gleichung mit p-q-Formel

$$\left(x^3-5x^2-4x+20\right):\left(x+2\right)=x^2-7x+10$$
$$-\left(x^3+2x^2\right)$$
$$-7x^2-4x$$
$$-\left(-7x^2-14x\right)$$
$$10x+20$$
$$-\left(10x+20\right)$$
$$0$$

$$x^2-7x+10=0;$$
$$x_{1,2}=\frac{--7}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-7}{2}\right)^2-10};$$
$$x_1=2\left(\mathrm{BE}\right);\,x_2=5.$$

Musterlösung Übungsklausur 1 (Forts.)

Aufgabe 9) (8 Pkt.)

$$f'(x)=\frac{1}{e^{3x+2}}\cdot e^{3x+2}\cdot 3=3.$$

Aufgabe 10) (10 Pkt.)

$$G(x)=E(x)-K(x)=10x-(x^2+16)=-x^2+10x-16;G'(x)=-2x+10;G''(x)=-2;$$

$$a¿G(x)=-x^2+10x-16=0\Leftrightarrow x^2-10x+16=0\Leftrightarrow \quad x_{1,2}=\frac{--10}{2}\pm\sqrt{5^2-16}\Leftrightarrow x_1=2(\mathrm{BE});x_2=8;$$

$$b¿G'(x)=-2x+10=0\Leftrightarrow x=5;G''(5)=-2<0\Rightarrow x=5\,\text{ist Maximum};$$
$$\text{Maximaler Gewinn: } G(5)=-5^2+10\cdot 5-16=9;$$

$$c¿DK(x)=\frac{K(x)}{x}=\frac{x^2}{x}+\frac{16}{x}=x+16x^{-1};$$

$$DK'(x)=1-16x^{-2}=0\Leftrightarrow 1=\frac{16}{x^2}\Leftrightarrow x^2=16\Leftrightarrow x_1=4;x_2=-4(\text{ökonomisch irrelevant});$$

$$x_1=4\,\text{ist Minimum (Betriebsoptimum), da } DK''(4)=32x^{-3}=32\cdot 4^{-3}>0.$$

Aufgabe 11) (8 Pkt.)

$$f(x,y)=10x^2+4x-2y^2+64y-16xy+6$$

I. $f_x(x,y)=20x+4-16y=0$ $\Rightarrow$ Lösung des Gleichungssystems x=3; y=4.

II. $f_y(x,y)=-4y+64-16x=0$ (Lösungsverfahren muss gezeigt werden)

$$Det(H(3;4))=\begin{vmatrix}20 & -16\\ -16 & -4\end{vmatrix}=20\cdot(-4)-(-16)\cdot(-16)=-336$$ $\Rightarrow$ (3;4) ist Sattelpunkt.

Aufgabe 12) (8 Pkt.)

Gleichgewichtspreis p_0 und -menge x_0 für $P^N(x) = 30 - 2{,}5x$; $P^A(x) = 5x$:

$P^N(x_0) = P^A(x_0) \Leftrightarrow 30 - 2{,}5x_0 = 5x_0 \Leftrightarrow x_0 = 4$; Einsetzen in $p_0 = P^N(x) = 30 - 2{,}5x_0 = 30 - 2{,}5 \cdot 4 = 20$;

Konsumentenrente:

$$KR=\int_0^{x_0} p^N(x)\,dx-p_0\cdot x_0=\int_0^4 30-2{,}5x\,dx-20\cdot 4=\left[30x-1{,}25x^2\right]\Big|_0^4-80=120-20-80=20;$$

Produzentenrente:

$$PR=p_0\cdot x_0-\int_0^{x_0} p_{\square}^{A}(x)\,dx=20\cdot 4-\int_0^4 5x\,dx=80-\left[2{,}5x^2\right]\Big|_0^4=80-40=40.$$

Musterlösung Übungsklausur 2

Aufgabe 1) (8 Pkt.)

$$K_t = K_0 + Z = K_0\left(1 + i\cdot\frac{x}{360}\right) \Leftrightarrow x = \left(\frac{K_0+Z}{K_0} - 1\right)\cdot\frac{360}{i} = \left(\frac{4.300+64{,}50}{4.300} - 1\right)\cdot\frac{360}{0{,}045} = 120\text{ Tage}.$$

Aufgabe 2) (8 Pkt.)

$$-500 + \frac{260}{q + \frac{280}{q^2}} = 0 \Leftrightarrow -500\,q^2 + 260\,q + 280 = 0 \Leftrightarrow q^2 - 0{,}52\,q - 0{,}56 = 0$$

$$p-q-Formel \Leftrightarrow q = \frac{--0{,}52}{2} + \sqrt{\left(\frac{-0{,}52}{2}\right)^2 - (-0{,}56)} = 1{,}0522 \quad i = q - 1 = 5{,}22\,\%$$

Aufgabe 3) (10 Pkt.)

Annahmen: r_2 = 1.500€, Lebenserwartung n_2 = 82 Jahre, aktuelles Alter n_1 = 37 Jahre, Zins i = 5%.

$$r_{e,2} = r_2\cdot\left[m + i\cdot\frac{m-1}{2}\right] = 1.500\cdot\left[12 + 5\,\%\cdot\frac{11}{2}\right] = 18.412{,}50;$$

$$R_0 = r_{e,2}\frac{q^{n_2-67}-1}{q^n(q-1)} = 18.412{,}50\,\frac{1{,}05^{15}-1}{1{,}05^{15}\,0{,}05} = 191.115{,}45;$$

$$R_n = r_{e,1}\frac{q^{67-n_1}-1}{q-1} \Leftrightarrow r_{e,1} = R_n\frac{q-1}{q^n-1} = 191.115{,}45\cdot\frac{0{,}05}{1{,}05^{30}-1} = 2.876{,}56;$$

$$r_1 = \frac{r_{e,1}}{\left[m + i\cdot\frac{m+1}{2}\right]} = \frac{2.876{,}56}{\left[2 + 5\,\%\cdot\frac{2+1}{2}\right]} = 1.386{,}29.$$

Aufgabe 4) (4 Pkt.)

$$A = S\frac{q^n(q-1)}{q^n-1} = 20.000\,\frac{1{,}04^{30}\cdot 0{,}04}{1{,}04^{30}-1} = 1.156{,}60;$$

$$Z_k = A\cdot\left(1 - q^{k-1-n}\right) = 1.156{,}60\left(1 - 1{,}04^{-21}\right) = 649{,}05;$$

$$T_k = A\cdot q^{k-1-n} = 507{,}56;$$

$$R_k = S\frac{q^n - q^{k-1}}{q^n-1} = 20.000\,\frac{1{,}04^{30} - 1{,}04^{11-1}}{1{,}04^{30}-1} = 15.718{,}60.$$

Aufgabe 5) (10 Pkt.)

$$G = U\text{-}K = P_E^T E - P_F^T ABE = \begin{pmatrix}40 & 50\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 7\\6 & 6\\7 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix} = 520 - \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}68\\72\\76\end{pmatrix} = 520 - 440 = 80.$$

Aufgabe 6) (8 Pkt.)

Lösung: $A^{-1} = \begin{pmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$ und $x = \begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$ (Lösungsverfahren muss gezeigt werden).

Aufgabe 7) (8 Pkt.)

$$P(x) = e^{-0{,}5x^2} \Rightarrow P'(x) = -x\,e^{-0{,}5x^2};\ \varepsilon_{x,p} = \frac{1}{\varepsilon_{p,x}} = \frac{1}{p'(x)\cdot\frac{x}{p(x)}} = \frac{1}{-x\,e^{-0{,}5x^2}\cdot\frac{x}{e^{-0{,}5x^2}}} = \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{0{,}5^2} = -4.$$

Musterlösung Übungsklausur 2 (Forts.)

Aufgabe 8) (10 Pkt.)

$f(x)=x^2(x-3)-24x=x^3-3x^2-24x; f'(x)=3x^2-6x-24; f''(x)=6x-6; f'''(x)=6;$

Extrema:
$f'(x)=3x^2-6x-24=0 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0$
$\Leftrightarrow x_{1,2}=1\pm\sqrt{1^2+8}; x_1=-2; x_2=4;$
$f''(-2)=6\cdot(-2)-6<0 \Rightarrow x_1=-2$ ist Maximum;
$f''(4)=6\cdot 4-6>0 \Rightarrow x_2=4$ ist Minimum;

Wende- und Sattelpunkte:
$f''(x)=6x-6=0 \Leftrightarrow x=1; f'''(1)=6\neq 0$
$\Rightarrow x=1$ ist Wendestelle.

Aufgabe 9) (10 Pkt.)

$G(x)=E(x)-K(x)=(100-6x)x-(2x^2+36x+120)=-8x^2+64x-120;$

$G'(x)=-16x+64; G''(x)=-16;$

$a¿G(x)=-8x^2+64x-120=0 \Leftrightarrow x^2-8x+15=0 \Leftrightarrow$ $\quad x_{1,2}=\frac{--8}{2}\pm\sqrt{4^2-15} \Leftrightarrow x_1=3(\text{BE}); x_2=5;$

$b¿G'(x)=-16x+64=0 \Leftrightarrow x=4; G''(4)=-16<0 \Rightarrow x=4$ ist Maximum;

$P=100-6\cdot 4=76;$

Maximaler Gewinn: $G(4)=-8\cdot 4^2+64\cdot 4-120=8;$

$DK(4)=\frac{K(x)}{x}=\frac{2x^2+36x+120}{x}=\frac{32+144+120}{4}=74.$

Aufgabe 10) (8 Pkt.)

$U(x_1,x_2)=8x_1+4x_2+2x_1x_2+8$ u.d.N.: $60=2\cdot x_1+4\cdot x_2;$

Einsetzen der Nebenbedingung $x_2=15-0{,}5x_1$ ergibt:

$U(x_1)=8x_1+60-2x_1+30x_1-x_1^2+8=-x_1^2+36x_1+68;$

$U'(x_1)=-2x_1+36=0 \Leftrightarrow x_1=18$ ist Maximum, da $U''(18)=-2<0;$
Einsetzen in die Nebenbedingung: $x_2=15-0{,}5\cdot 18=6.$

Aufgabe 11) (6 Pkt.)

Integrationsregel lineare Substitution:

$\int_{20}^{24} ¿¿$