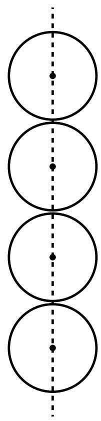
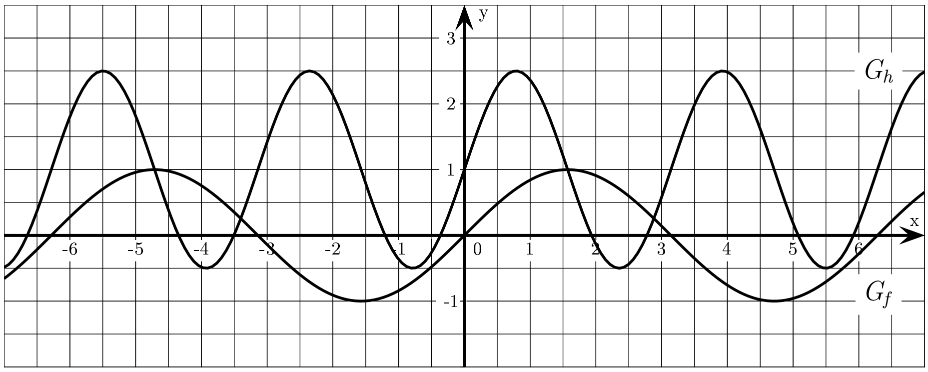
BE	
6	1. Zum Verpacken von vier Tennisbällen mit einem Durchmesser von je 6,8 cm stehen eine Verpackung in Form eines Quaders und eine in Form eines geraden Kreiszylinders zur Verfügung. Die vier Tennisbälle sollen so verpackt werden, dass sie sich senkrecht übereinanderliegend berühren und der unterste Tennisball die Grundfläche und der oberste die Deckfläche berührt. Außerdem sollen alle Tennisbälle die Mantelfläche der Verpackung berühren. Bei beiden Verpackungsarten bleibt in der Verpackung ein leerer Raum zwischen den Bällen und der Verpackung, dessen Volumen mit V_1 (quaderförmige Verpackung) bzw. V_2 (zylinderförmige Verpackung) bezeichnet wird. Berechnen Sie das Verhältnis $V_1 : V_2$. 
2	2. a) Vereinfachen Sie den Term $\log_5\left(\frac{1}{125}\cdot 5^{100}\right)$ schrittweise, nachvollziehbar und ohne Verwendung des Taschenrechners so weit wie möglich.
3	b) Vereinfachen Sie den Term $\log_a(8x) - \log_a(\sqrt{x}) + \log_a\left(\frac{1}{8}x^3\right)$ mit $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $x \in \mathbb{R}^+$ so weit wie möglich.
4	c) Bestimmen Sie für den Term $\log_2(8x-3)$ die maximale Definitionsmenge und ermitteln Sie über dieser Menge für die Gleichung $\log_2(8x-3) = 3$ die Lösungsmenge.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	

3. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto \sin(x)$. Ihr Graph G_f ist in der folgenden Abbildung dargestellt. Diese Abbildung zeigt auch den Graphen G_h einer weiteren in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h.



3 a) Es ist $f(\frac{\pi}{6}) = 0{,}5$.
Geben Sie exakte Werte für alle weiteren Stellen x aus dem Intervall $[-2\pi; 4\pi]$ an, für die $f(x) = 0{,}5$ ist.

4 b) G_h geht schrittweise aus G_f hervor. Beschreiben Sie die einzelnen Schritte, wie das durchgeführt werden kann, und geben Sie einen möglichen Funktionsterm von h an.

2 c) Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung näherungsweise alle Intervalle im dargestellten Bereich, in denen $h(x) \leq f(x)$ gilt. Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen durch geeignete Eintragungen in der Abbildung.

4. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{8}\,(x^2 + 4x + 4)\,(x^2 - 3x)$.

3 a) Ermitteln Sie die Nullstellen von f.

2 b) Geben Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$ an.

Der tiefste Punkt des Graphen von f ist $P(2|-4)$.

4 c) Berechnen Sie $f(1)$ und skizzieren Sie den Graphen von f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse.

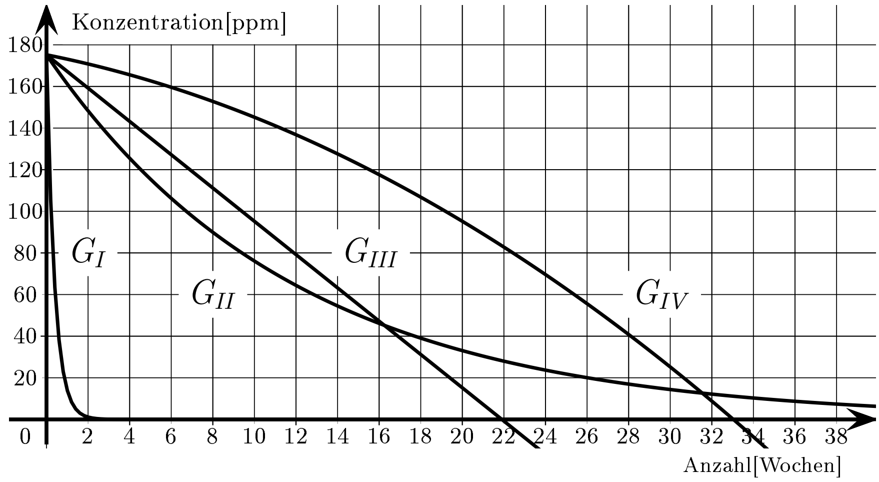
4 d) Geben Sie jeweils alle Nullstellen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g : x \mapsto -f(x+2)$ und $h : x \mapsto f(x) + 4$ an und begründen Sie ihre Angaben.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

5. Nach einem Fabrikunfall ist ein Giftstoff in einen Badesee gelangt, so dass ein Badeverbot erlassen werden musste. Durch Messungen wurde festgestellt, dass zu Beobachtungsbeginn die Konzentration des Giftstoffes im Wasser 175 ppm (parts per million) betrug. Untersuchungen zu diesem Giftstoff haben ergeben, dass seine Konzentration im Badesee aufgrund natürlicher Prozesse wöchentlich um 8 % abnimmt.

3 a) Nachstehende Abbildung zeigt vier Graphen, von denen einer zum Sachzusammenhang passt.



Begründen Sie, ohne explizite Berechnung von Koordinaten, durch Ausschluss, welcher Graph zum Sachzusammenhang passt.

2 b) Begründen Sie, dass die in $\mathbb{R}_0^+$ definierte Funktion $f: x \mapsto 175 \cdot 0{,}92^x$ den betrachteten Abnahmevorgang beschreibt. Die Variable x bezeichnet hierbei die Anzahl der seit der Verunreinigung vergangenen Wochen; $f(x)$ gibt die Konzentration des Giftstoffs im Wasser in ppm an.

3 c) Wenn die Konzentration des Giftstoffes im Badesee unter 10 ppm gefallen ist, kann das Badeverbot aufgehoben werden. Berechnen Sie, wie viele Wochen nach Beobachtungsbeginn diese Konzentration unterschritten wird.

2 d) Ermitteln Sie rechnerisch, um wieviel Prozent die Konzentration des Giftstoffes innerhalb der ersten vier Wochen nach Beobachtungsbeginn abnimmt.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

6. Auf österreichischen Skipisten wurde eine Umfrage zum Tragen von Skihelmen durchgeführt. Es wurden 10 000 Skifahrer befragt, wobei $\frac{17}{50}$ von ihnen Anfänger waren. Dabei zeigte sich, dass 63 % aller Befragten einen Helm tragen. 67 % der Befragten, die keine Anfänger wären, tragen einen Helm.
   Unter den Befragten wird ein Skifahrer zufällig ausgewählt. Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:
   H: „Der ausgewählte Skifahrer trägt einen Helm."
   A: „Der ausgewählte Skifahrer ist ein Anfänger."

3 a) Stellen Sie die Ergebnisse der Umfrage in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar.

4 b) Erstellen Sie zu dieser Situation ein vollständiges Baumdiagramm und tragen Sie alle an den Zweigen vorkommenden Wahrscheinlichkeiten auf ganze Prozent gerundet ein. Unterscheiden Sie in der ersten Stufe des Baumdiagramms die Ereignisse H und $\overline{H}$.

1 c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass es sich bei einer zufällig ausgewählten Person um einen Anfänger handelt, wenn bekannt ist, dass diese Person einen Helm trägt.

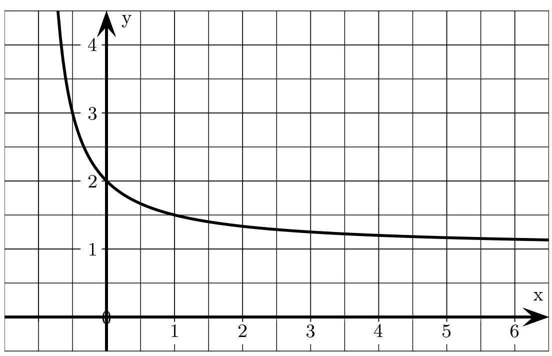
1 d) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang, welche Wahrscheinlichkeit mit $P_A(H)$ angegeben wird.

4 7. Gegeben ist der abgebildete Funktionsgraph, der sich für $x \to \infty$ der Geraden $y = 1$ annähert.
   Gegeben sind weiterhin die folgenden fünf Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 und f_5 mit jeweils maximaler Definitionsmenge.

$$f_1 : x \mapsto \frac{2x}{x-1} \qquad f_2 : x \mapsto 2^x + 1 \qquad f_3 : x \mapsto \frac{1}{x+1} + 1$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{2}{x+1} \qquad f_5 : x \mapsto 2 \cdot 0{,}5^x$$

   Eine der Funktionen passt zum abgebildeten Graphen. Begründen Sie für vier der Funktionen ohne explizite Berechnung von Funktionswerten, dass diese nicht zum abgebildeten Graphen passen.



60