

MATHEMATIK II FÜR ET/IT UND ITS IM SS 2008

INHALTSVERZEICHNIS

1. Fourierreihen	3
1.1. Ziel	3
1.2. Periodische Funktionen	3
1.3. Warum Fourierreihen?	4
1.4. Fourierkoeffizienten und Orthogonalitätsrelationen	5
1.5. Gerade und ungerade Funktionen	8
1.6. Rechenregeln - erster Teil	9
1.7. Darstellungssatz	10
1.8. Integration von Fourierreihen	15
1.9. Komplexe Darstellung der Fourierreihe	16
1.10. Rechenregeln - zweiter Teil	18
1.11. Das periodische Faltungsprodukt	20
1.12. Vollständigkeit und Eindeutigkeit	22
1.13. Fourierreihenansatz bei Differentialgleichungen	23
2. Orthonormalsysteme	25
2.1. Vektorräume	25
2.2. Normierte Vektorräume	25
2.3. Umgebungen und Konvergenz	26
2.4. Skalarprodukt	27
2.5. Orthonormalsysteme	29
2.6. Approximation stetiger Funktionen durch Polynome	31
3. Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher	37
3.1. Eigenschaften des \mathbb{R}^n	37
3.2. Beispiele und Darstellungshilfen	38
3.3. Stetigkeit	40
3.4. Differenzierbarkeit	42
3.5. Partielle Ableitungen höherer Ordnung	48
3.6. Funktionen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m und Kettenregel	50
3.7. Mittelwertsatz, Poincarésches Lemma, Taylorreihen	56
3.8. Implizite Funktionen	58
3.9. Extrema für Funktionen mehrerer Veränderlicher	63
4. Einführung in die numerische Mathematik	74
4.1. Fixpunktverfahren	74
4.2. Interpolation	78
4.3. Numerische Integration	80
4.4. Differenzenverfahren	81

5. Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher	82
5.1. Integrale über abgeschlossenen Intervallen, Satz von Fubini	82
5.2. Integration auf beschränkten Mengen, Eigenschaften des Integrals	84
5.3. Messbare Mengen	85
5.4. Integration über Normalbereiche	86
5.5. Mittelwertsatz	88
5.6. Substitution, Koordinatenwechsel, Transformationsregel	88
5.7. Uneigentliche Integrale	91
6. Laplacetransformation	94
6.1. Integraltransformationen	94
6.2. Definition und erste Beispiele für Laplacetransformierte	94
6.3. Eigenschaften der Laplace-Transformation	96
6.4. Inverse der Laplace-Transformation	98
6.5. $2L$ -periodische Funktionen	100
6.6. Faltung	100
7. Kurven, Flächen, Integralsätze	103
7.1. Kurvenlängen und Flächeninhalte	103
7.2. Vektorfelder	107
7.3. Kurvenintegral - Zirkulation eines Vektorfeldes entlang einer Kurve	107
7.4. Rotation und Gradientenfelder	109
7.5. Flächenintegrale - Fluss eines Vektorfeldes durch eine Fläche	112
7.6. Integralsätze von Stokes und Green	113
7.7. Divergenz - Charakterisierung von Wirbelfeldern	115
7.8. Gaußscher Integralsatz	116
7.9. Anwendungen in der Elektrodynamik	118

1. FOURIERREIHEN

1.1. **Ziel.** Man möchte sich regelmäßig wiederholende (periodische) Funktionen durch natürliche/schöne periodische Funktionen (Sinus- und Kosinusfunktionen) approximieren (annähern). Zu einer gegebenen periodischen Funktion $f(x)$ suchen wir eine Reihenentwicklung

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

mit reellen Koeffizienten $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

1.2. **Periodische Funktionen.**

Definition 1. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **L -periodisch**, ($L \in \mathbb{R}$, $L > 0$), wenn $f(x + L) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel 1. Die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ sind 2π -periodisch, denn $\sin(x + 2\pi) = \sin x \cos(2\pi) + \sin(2\pi) \cos x = \sin x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, da $\sin(2\pi) = 0$ und $\cos 2\pi = 1$.

Beispiel 2. Die Funktionen $\sin kx$ und $\cos kx$ sind $2\pi/k$ -periodisch für jedes $k \neq 0$.

Lemma 1. Eine Funktion f ist genau dann L -periodisch, wenn die Funktion

$$g : x \mapsto f\left(\frac{L}{2\pi}x\right)$$

eine 2π -periodische Funktion ist.

Beweis. Wenn $f(x + L) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann

$$g(x + 2\pi) = f\left(\frac{L}{2\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{L}{2\pi}x + L\right) = f\left(\frac{L}{2\pi}x\right) = g(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wenn $g(x + 2\pi) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann

$$f(x + L) = f\left(\frac{L}{2\pi}\left(x \frac{2\pi}{L} + 2\pi\right)\right) = g\left(x \frac{2\pi}{L} + 2\pi\right) = g\left(x \frac{2\pi}{L}\right) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. □

Dies bedeutet, dass man durch eine einfache Koordinatentransformation, $x = 2\pi y/L$, eine L -periodische Funktion in eine 2π -periodische Funktion umwandeln kann.

Jede L -periodische Funktion ist für alle $k \in \mathbb{N}$ auch kL -periodisch. Deshalb ist es sinnvoll, die kleinste Periode einer periodischen Funktion zu bestimmen.

Beispiel 3 (Zweiweg-gleichgerichteter Sinus). Die kleinste Periode der Funktion $|\sin x|$ ist π , denn $|\sin(x + \pi)| = |\sin x \cos \pi + \sin \pi \cos x| = |-\sin x| = |\sin x|$, da $\sin \pi = 0$ und $\cos \pi = -1$. $L = \pi$ ist die kleinste Periode der Funktion $|\sin x|$, weil die Menge $\pi\mathbb{Z}$ der Nullstellen der Funktion $|\sin x|$ keine kleinere Periode besitzt.

Beispiel 4. Die kleinste Periode der Funktion $f(x) = \sin(3x) \cos(2x)$ ist 2π . Da $\sin(3x)$ und $\cos(2x)$ die Periode 2π haben, ist auch f eine 2π -periodische Funktion. Gibt es noch eine kleinere Periode? Wir betrachten die Nullstellen von f . Es gilt $f(x) = 0$ genau dann, wenn $x = k\pi/3$ oder $x = \pi/4 + k\pi/2$. Die Nullstellen haben die kleinste Periode π . Wir prüfen $f(x + \pi) = \sin(3(x + \pi)) \cos(2(x + \pi)) = \sin(3x + 3\pi) \cos(2x + 2\pi) = -\sin(3x) \cos(2x) \neq f(x)$.

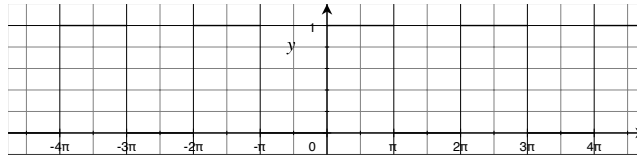


ABBILDUNG 1. 2π -periodische Fortsetzung von $f(x) = x$ für $x \in [-\pi, \pi)$

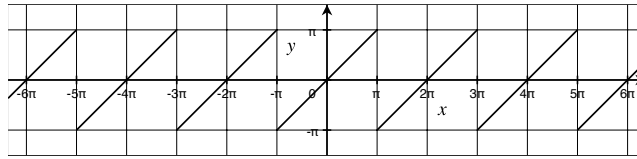


ABBILDUNG 2. 2π -periodische Fortsetzung von $f(x) = x$ für $x \in [-\pi, \pi]$

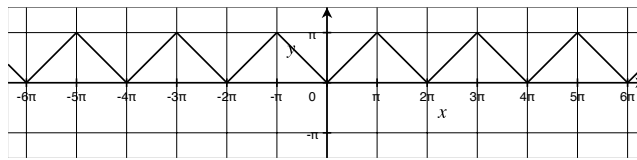


ABBILDUNG 3. 2π -periodische Fortsetzung von $f(x) = |x|$ für $x \in [-\pi, \pi]$

Definition 2. Die L -periodische Fortsetzung einer auf einem Intervall $[a, b)$ oder $(a, b]$ der Länge L , d.h. $b - a = L$, definierten Funktion f ist gegeben durch $x + kL \mapsto f(x)$ für $x \in [a, b)$ und $k \in \mathbb{Z}$.

Beispiel 5 (Rechteckimpuls). Der Rechteckimpuls

$$f : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

hat die 2π -periodische Fortsetzung (wie in Abbildung 1)

$$f(x + 2k\pi) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \pi, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & -\pi \leq x < 0, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Beispiel 6 (Sägezahnkurve). Die Funktion $f(x) : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ hat die 2π -periodische Fortsetzung $f(x + 2k\pi) = x$ für $x \in [-\pi, \pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ (Abbildung 2).

Beispiel 7 (Dreieckskurve). Die 2π -periodische Fortsetzung der Funktion $f(x) : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ist $f(x + 2k\pi) = |x|$ für $x \in [-\pi, \pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ (Abbildung 3).

1.3. Warum Fourierreihen? Wir kennen bereits die Taylorreihenentwicklung als eine Methode, um eine Funktionen f zu approximieren. Hier sollen Taylorreihen und Fourierreihen verglichen werden.

Um eine Funktion f in eine Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ um einen Punkt x_0 entwickeln zu können, muss f in x_0 glatt sein. Die Koeffizienten a_n hängen nur

von den Funktionswerten $f(x)$ in der Nähe von x_0 ab, da $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$. Es gibt einen Konvergenzradius R , so dass die Taylorreihe für alle x mit $|x - x_0| < R$ konvergiert. Auch wenn der Konvergenzradius R positiv ist, kann es passieren, dass die Funktion f nur für $x = x_0$ durch ihre Taylorreihe dargestellt wird. Taylorreihen sind insbesondere sehr hilfreich, wenn man eine Funktion lokal verstehen will und die auftretenden Restglieder (Fehler) gut abschätzen kann. Die Grundfunktionen x^n sind algebraische Funktionen. Ihre Funktionswerte lassen sich leicht berechnen.

Weder der unstetige Rechteckimpuls und die unstetige Sägezahnkurve noch die in $x = 0$ nicht differenzierbare Dreieckskurve lassen sich auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ gut durch eine Taylorreihe annähern. Eine Taylorentwicklung wäre um $x = 0$ bzw. $x = \pm\pi$ gar nicht möglich. Die Taylorentwicklung dieser Funktionen um einen glatten Punkt würde die Funktionen immer nur auf einem Teilintervall darstellen. Zum Beispiel ist $1 + (x - 1)$ die Taylorreihe der Dreieckskurve um $x = 1$. Sie stimmt nur auf $[0, \pi]$ mit der Dreieckskurve überein.

Um eine Funktion f in eine Fourierreihe $a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ entwickeln zu können, muss f integrierbar und periodisch sein. Die Koeffizienten a_n, b_n hängen von fast allen Funktionswerten ab, da sie durch Integration bestimmt werden. Wenn die Funktion f sogar stückweise stetig differenzierbar ist, so konvergiert ihre Fourierreihe fast alle x gegen $f(x)$. Wir benutzen Fourierreihen, um global eine möglichst gute Näherung zu finden. Die Grundfunktionen $\sin(nx)$ und $\cos(nx)$ sind transzendente Funktionen, d.h. ihre Funktionswerte lassen sich schwer berechnen. Aber als Schwingungen sind sie technisch gut realisierbar und ihre Ableitungseigenschaften sind auch bequem.

1.4. Fourierkoeffizienten und Orthogonalitätsrelationen.

Satz 1. *Wenn die Funktionenreihe*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

gleichmäßig gegen eine Funktion $f(x)$ konvergiert, dann gilt für die Koeffizienten

$$(1) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Beweis. Wir betrachten das Integral $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$ mit $k \in \mathbb{N}$. Da die Funktionenreihe gleichmäßig konvergiert, können wir Summation und Integration vertauschen.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right) \cos(kx) dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(kx) dx \\ &= \begin{cases} \frac{a_0}{2} 2\pi & (k = 0) \\ a_k \pi & (k \neq 0) \end{cases} = \pi a_k, \end{aligned}$$

denn

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx = \frac{1}{k} [\sin(kx)]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(kx) dx &= \int_{-\pi}^0 \sin(nx) \cos(kx) dx + \int_0^{\pi} \sin(nx) \cos(kx) dx \\ &= \int_{\pi}^0 -\sin(-ny) \cos(-ky) dy + \int_0^{\pi} \sin(nx) \cos(kx) dx \\ &= -\int_0^{\pi} \sin(ny) \cos(ky) dy + \int_0^{\pi} \sin(nx) \cos(kx) dx = 0 \end{aligned}$$

mit der Substitution $y = -x$, $-dy = dx$ im ersten Summanden,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+k)x) + \cos((n-k)x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+k)x) dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-k)x) dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{n+k} [\sin((n+k)x)]_{-\pi}^{\pi} \\ &\quad + \frac{1}{2} \begin{cases} 2\pi & (n=k) \\ \frac{1}{2} \frac{1}{n-k} [\sin((n-k)x)]_{-\pi}^{\pi} & (n \neq k) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \pi & (n=k) \\ 0 & (n \neq k) \end{cases}, \end{aligned}$$

da $k, n \in \mathbb{N}$ und $n > 0$.

Nun betrachten wir das Integral $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$ mit $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$, um die Koeffizienten b_n zu bestimmen.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right) \sin(kx) dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(kx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) dx \\ &= \pi b_k, \end{aligned}$$

da $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(kx) dx = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx = 0$ für alle $k \neq 0$ und

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} -\cos((n+k)x) + \cos((n-k)x) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+k)x) dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-k)x) dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{n+k} [\sin((n+k)x)]_{-\pi}^{\pi} \\ &\quad + \frac{1}{2} \begin{cases} 2\pi & (n=k) \\ \frac{1}{2} \frac{1}{n-k} [\sin((n-k)x)]_{-\pi}^{\pi} & (n \neq k) \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \pi & (n = k) \\ 0 & (n \neq k) \end{cases},$$

da $k, n \in \mathbb{N}$ und $n > 0$. □

Die Beziehungen

$$(2) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(nx))^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(nx))^2 dx = 1 \quad (n \neq 0),$$

$$(3) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(nx) dx = 0 \quad (n, k \in \mathbb{N}, n > 0 \text{ oder } k > 0)$$

heißen **Orthogonalitätsrelationen**.

Definition 3. Die **Fourierreihe** einer stückweise stetigen, 2π -periodischen Funktion $f(x)$ ist die Reihe $a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ mit den **Fourierkoeffizienten**

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Wir schreiben

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

um anzudeuten, dass es sich um die Fourierreihe der Funktion f handelt.

Warnung: Bisher wissen wir weder ob die Fourierreihe konvergiert, noch ob ihr Grenzwert, falls er existiert, mit der Funktion f übereinstimmt!

Beispiel 8 (Polynome in $\sin x$ und $\cos x$). Die konstante Funktion $f(x) \equiv c \in \mathbb{R}$ ist bereits eine Fourierreihe ($a_0 = 2c$). Die Fourierreihe der Funktion $f(x) = \sin^2 x$ erhalten wir mit Hilfe der Additionstheoreme. Da $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, gilt

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x).$$

Beispiel 9 (Rechteckimpuls). Wir berechnen die Fourierreihe der 2π -periodischen Fortsetzung der Funktion

$$f : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}.$$

Es gilt

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ \frac{1}{\pi n} [\sin(nx)]_0^{\pi} = 0 & (n \neq 0) \end{cases}$$

und

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = -\frac{1}{\pi n} [\cos(nx)]_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi n} ((-1)^n - 1) \\ = \begin{cases} 0 & (n \text{ gerade}) \\ \frac{2}{n\pi} & (n \text{ ungerade}) \end{cases}.$$

damit ist die Fourierreihe von f die Reihe

$$\chi_{[0, \pi)}(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2 \sin((2m+1)x)}{\pi(2m+1)} \text{ auf } [-\pi, \pi].$$

1.5. Gerade und ungerade Funktionen. Wenn man die Symmetrien der Funktion beachtet, kann man ihre Fourierreihe schneller berechnen.

Definition 4. Eine auf \mathbb{R} definierte Funktion f heißt **gerade**, wenn $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Sie heißt **ungerade**, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

An den Symmetrien des Graphen einer Funktion kann man leicht erkennen, ob die Funktion gerade oder ungerade ist. Der Graph einer geraden Funktion ist symmetrisch bezüglich Spiegelung an der y -Achse. Der Graph einer ungeraden Funktion ist symmetrisch bezüglich Drehung um den Ursprung um 180° .

Beispiel 10. Gerade 2π -periodische Funktionen sind $\cos(nx)$, Dreieckskurve, $|\sin x|$.

Beispiel 11. Ungerade 2π -periodische Funktionen sind $\sin(nx)$, Sägezahnkurve und die 2π -periodische Fortsetzung der Funktion

$$f : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2\chi_{[0, \pi)} - 1 = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}.$$

Lemma 2. Wenn f eine ungerade integrierbare Funktion ist, dann gilt

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

für alle $a > 0$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_a^0 -f(-y) dy + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_a^0 f(y) dy + \int_0^a f(x) dx = -\int_0^a f(y) dy + \int_0^a f(x) dx = 0 \end{aligned}$$

mit $x = -y$, $dx = -dy$, da $f(-y) = -f(y)$ und sich bei der Vertauschung der Integrationsgrenzen das Vorzeichen des Integrals ändert. \square

Folgerung 1. Es sei $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ die Fourierreihe einer stückweise stetigen, 2π -periodischen Funktion. Wenn f ungerade ist, dann $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn f gerade ist, dann $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wenn f ungerade ist, dann ist $f(x) \cos(nx)$ eine ungerade Funktion. Wenn f gerade ist, dann ist $f(x) \sin(nx)$ eine ungerade Funktion. \square

Beispiel 12 (Fourierreihe der Sägezahnkurve). Die Funktion $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ ist ungerade. Darum gilt für die Fourierkoeffizienten $a_n = 0$ und

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{x}{n} \cos(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left((-1)^{n+1} \frac{2\pi}{n} + 0 \right) = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \end{aligned}$$

wegen der Orthogonalitätsrelation $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = 0$. Die Fourierreihe der 2π -periodischen Fortsetzung von $f(x) = x$ ist also die Reihe

$$x \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n} \text{ auf } (-\pi, \pi).$$

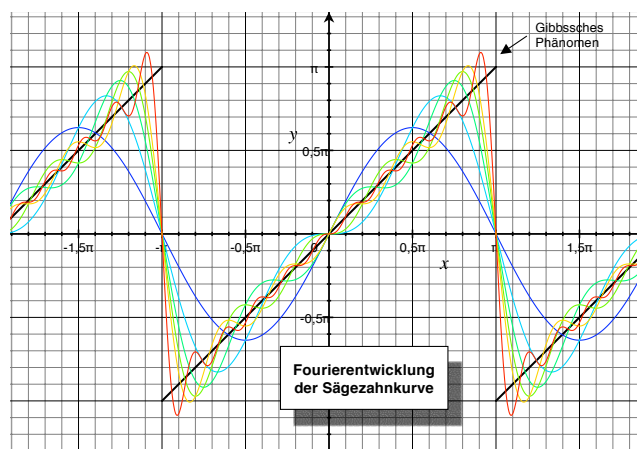


ABBILDUNG 4. Fourierapproximation der 2π -periodischen Fortsetzung von $f(x) = x$ für $x \in (-\pi, \pi]$

Beispiel 13 (Fourierreihe des Zweiweg-gleichgerichteten Sinus). Da die Funktion $f(x) = |\sin x|$ gerade ist, gilt für die Fourierkoeffizienten $b_n = 0$ und

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2 - 1} [\cos x \cos(nx) + n \sin x \sin(nx)]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2 - 1} ((-1)^{n+1} - 1) = \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade} \\ -\frac{4}{\pi} \frac{1}{n^2 - 1} & n \text{ gerade} \end{cases}, \end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned} \int \sin x \cos(nx) dx &= -\cos x \cos(nx) - n \int \cos x \sin(nx) dx \\ &= -\cos x \cos(nx) - n \sin x \sin(nx) + n^2 \int \sin x \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{n^2 - 1} (\cos x \cos(nx) + n \sin x \sin(nx)). \end{aligned}$$

Die Fourierreihe von $|\sin x|$ ist

$$|\sin x| \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4m^2 - 1} \cos(2mx).$$

1.6. Rechenregeln - erster Teil. Wenn f und g zwei integrierbare, 2π -periodische Funktionen mit den Fourierreihen $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ und $g(x) \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(nx) + d_n \sin(nx)$ sind, dann ist für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ die Fourierreihe der Funktion $\lambda f(x) + \mu g(x)$ gerade

$$\lambda f(x) + \mu g(x) \sim \frac{\lambda a_0 + \mu c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu c_n) \cos(nx) + (\lambda b_n + \mu d_n) \sin(nx).$$

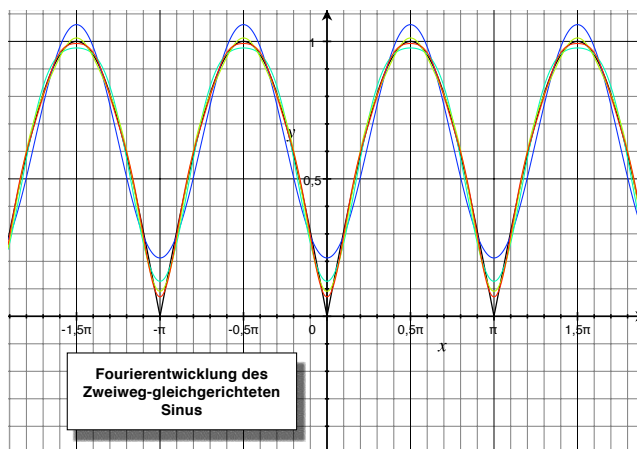


ABBILDUNG 5. Fourierapproximation von $|\sin x|$

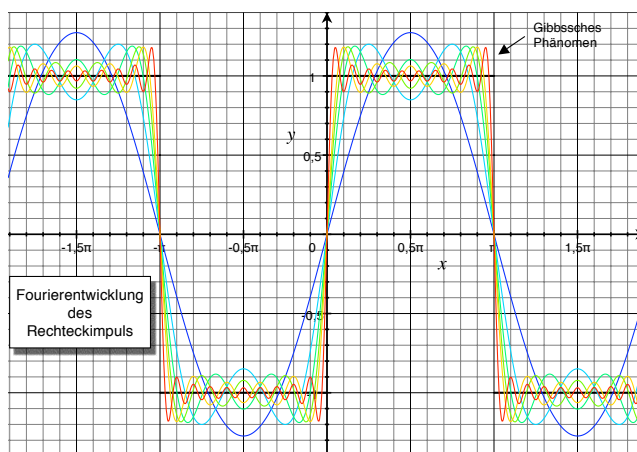


ABBILDUNG 6. Fourierapproximation des symmetrischen Rechteckimpuls

Beispiel 14. Die Fourierreihe der 2π -periodischen Fortsetzung der Funktion

$$g : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} h & (x \geq 0) \\ -h & (x < 0) \end{cases}$$

mit $h \geq 0$ ist

$$g(x) \sim \frac{4h}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2m+1)x)}{2m+1},$$

denn $g(x) = 2h(f(x) - 1/2)$ mit dem Rechteckimpuls f aus Beispiel 9.

1.7. Darstellungssatz. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass die Fourierreihe einer stückweise differenzierbaren, 2π -periodischen Funktion fast überall punktweise gegen die Ausgangsfunktion konvergiert und diese Konvergenz auf jedem abgeschlossenen Intervall ohne Sprungstellen sogar gleichmäßig ist.

Definition 5. Eine Funktion $f[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **stückweise stetig** bzw. **stückweise stetig differenzierbar**, wenn f bis auf höchstens endlich viele Stellen in $[a, b]$ stetig bzw. stetig differenzierbar ist und in den Ausnahmestellen jeweils alle im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ möglichen einseitigen Grenzwerte von f bzw. f' existieren.

Natürlich sind alle stetigen bzw. stetig differenzierbaren Funktionen auch stückweise stetig bzw. stückweise stetig differenzierbar. Der Rechteckimpuls und die Sägezahnkurve sind Beispiele für nicht stetige, aber stückweise stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktionen. Die Dreieckskurve, $|\sin x|$ und die 2π -periodische Fortsetzung von $f(x) = x^2$ mit $x \in [-\pi, \pi]$ sind Beispiele für stetige, aber nur stückweise stetig differenzierbare Funktionen.

Stückweise stetige Funktionen f auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ sind beschränkt. Die Funktionswerte an den endlich vielen Sprungstellen haben auf die Berechnung des Integrals $\int_a^b f(x) dx$ keinen Einfluss.

Beispiel 15 (fast überall stetige, nicht stückweise stetige Funktionen). Die Funktionen $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

sind auf dem Intervall $(0, 1]$ stetig und in $x = 0$ unstetig. Sie sind aber nicht stückweise stetig, weil der einseitige Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nicht existiert und $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \infty$.

Lemma 3. Für alle $x \neq 2l\pi$ mit $l \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(nx + x/2)}{2 \sin(x/2)}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \cos(kx) &= \sum_{k=0}^n \Re(e^{ikx}) = \Re\left(\sum_{k=0}^n e^{ikx}\right) = \Re\left(\sum_{k=0}^n (e^{ix})^k\right) = \Re\left(\frac{e^{ix(n+1)} - 1}{e^{ix} - 1}\right) \\ &= \Re\left(\frac{e^{i(xn+x/2)} - e^{-ix/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}\right) = \Re\left(\frac{e^{i(xn+x/2)} - e^{-ix/2}}{2i \sin(x/2)}\right) \\ &= \frac{\sin(nx + x/2) + \sin(x/2)}{2 \sin(x/2)} = \frac{1}{2} + \frac{\sin(nx + x/2)}{2 \sin(x/2)}. \end{aligned}$$

□

Lemma 4. Wenn $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und 2π -periodisch, dann gilt für das Fourierpolynom

$$T_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} K_n(t) dt$$

mit dem Kern

$$K_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin(2nt+t)}{\sin t} & (t \neq 0) \\ 2n + 1 & (t = 0) \end{cases}$$

Beweis. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) \cos(kx) dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) \sin(kx) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) \cos(kx) + \sin(kt) \sin(kx) \right) f(t) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right) f(t) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k(t-x)) \right) f(t) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(ks) \right) f(s+x) ds \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(ks) \right) f(s+x) ds + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(ks) \right) f(s+x) ds \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(-kt) \right) f(-t+x) dt \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) \right) f(t+x) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) \right) f(x-t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) \right) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(t+x) + f(x-t)) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) \right) dt \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (f(x+2s) + f(x-2s)) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(2ks) \right) ds \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (f(x+2s) + f(x-2s)) \frac{\sin(2ns+s)}{2 \sin s} ds
\end{aligned}$$

indem wir

- die Formeln für die Fourierkoeffizienten einsetzen,
- Summation und Integration vertauschen,
- $f(t)$ ausklammern,
- das Additionstheorem für $\cos(kt - kx)$ anwenden,
- die Integrationsgrenzen verschieben, weil der Integrand 2π -periodisch ist,
- die Substitution $s = t - x$, $ds = dt$ durchführen,
- das Integrationsintervall $[-\pi, \pi] = [-\pi, 0] \cup [0, \pi]$ zerlegen,
- im ersten Summanden $t = -s$ und $dt = -ds$ substituieren und im zweiten Summanden die Integrationsvariable s durch t ersetzen,

- ausnutzen, dass Kosinus eine gerade Funktion ist, und dass sich bei der Vertauschung der Integrationsgrenzen das Vorzeichen des Integrals umkehrt,
- Summe und Integration vertauschen,
- $t = 2s$ und $dt = 2ds$ substituieren,
- das Lemma 3 mit $x = 2s$ anwenden.

□

Folgerung 2. *Es gilt*

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} K_n(t) dt = 1.$$

Beweis. Wir betrachten die konstante Funktion $f(x) \equiv 1$ und wenden Lemma 4 an:

$$T_n(x) = 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1+1}{2} K_n(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} K_n(t) dt.$$

□

Lemma 5. *Wenn f stückweise stetig im Intervall $[a, b]$, dann gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0.$$

Beweis. Wir zerlegen das Intervall $[a, b]$ in endlich viele Intervalle, in denen f stetig ist. So reicht es, die Aussage für stetige Funktionen f zu beweisen. Zu jedem $\delta > 0$ und jedem $x \in [a, b]$ gibt es ein $\varepsilon_x > 0$ mit $|f(y) - f(x)| < \delta$ für alle y mit $|y - x| < \varepsilon_x$. Da das Intervall $[a, b]$ kompakt ist, gibt es endlich viele x_j , so dass die Vereinigung der ε_{x_j} -Umgebungen von x_j das Intervall $[a, b]$ überdecken. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt &= \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = \sum_j \int_{x_j - \varepsilon_j}^{x_j + \varepsilon_j} f(t) \sin(nt) dt \\ &= \sum_j \int_{x_j - \varepsilon_j}^{x_j + \varepsilon_j} (f(t) - f(x_j) + f(x_j)) \sin(nt) dt \\ &= \sum_j \int_{x_j - \varepsilon_j}^{x_j + \varepsilon_j} (f(t) - f(x_j)) \sin(nt) dt + \sum_j \int_{x_j - \varepsilon_j}^{x_j + \varepsilon_j} f(x_j) \sin(nt) dt. \end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) \sin(nt) dt \right| &\leq \sum_j \int_{x_j - \varepsilon_j}^{x_j + \varepsilon_j} |f(t) - f(x_j)| |\sin(nt)| dt \\ &\quad + \sum_j \left| \int_{x_j - \varepsilon_j}^{x_j + \varepsilon_j} f(x_j) \sin(nt) dt \right| \\ &\leq \delta \sum_j \int_{x_j - \varepsilon_j}^{x_j + \varepsilon_j} dt + \sum_j f(x_j) \left| \int_{x_j - \varepsilon_j}^{x_j + \varepsilon_j} \sin(nt) dt \right| \\ &\leq \delta(b - a) + M \sum_j \left| \int_{x_j - \varepsilon_j}^{x_j + \varepsilon_j} \sin(nt) dt \right|, \end{aligned}$$

da $|f(t) - f(x_j)| < \delta$ auf dem jeweiligen Integrationsintegral, $|\sin t| \leq 1$ und mit $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$.

Auf jedem abgeschlossenen Intervall $[c, d]$, z.B. $[c, d] = [x_j - \varepsilon_j, x + \varepsilon_j]$, gilt

$$\left| \int_c^d \sin(nt) dt \right| = \left| -\frac{1}{n} [\cos(nt)]_c^d \right| \leq \frac{1}{n},$$

da $|\cos x| \leq 1$. Damit gilt

$$\left| \int_a^b f(t) \sin(nt) dt \right| \leq \delta(b-a) + \frac{M}{n}$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M}{n} = 0,$$

da $\delta(b-a)$ beliebig klein gewählt werden kann. \square

Satz 2 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe). *Für jede stückweise stetige, stückweise stetig differenzierbare, 2π -periodische Funktion f konvergiert die Fourierreihe von f punktweise gegen*

$$\begin{cases} f(x) & , \text{ falls } f \text{ stetig in } x \\ \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) & , \text{ falls } x \text{ Sprungstelle von } f \end{cases}$$

Die Fourierreihe konvergiert auf jedem abgeschlossenen Intervall ohne Sprungstellen gleichmäßig.

Hier bezeichnen $f(x^+)$ und $f(x^-)$ den rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert von f an der Stelle x .

Beweis. Wir betrachten die Differenz zwischen Fourierpolynom $T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ und behauptetem Grenzwert $(f(x^+) + f(x^-))/2$:

$$T_n(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t) + f(x-2t) - f(x^+) - f(x^-)}{2} K_n(t) dt.$$

Der Integrand

$$\begin{aligned} & \frac{f(x+2t) + f(x-2t) - f(x^+) - f(x^-)}{2} K_n(t) \\ &= \left(\frac{f(x+2t) - f(x^+)}{2t} + \frac{f(x-2t) - f(x^-)}{2t} \right) \frac{t}{\sin t} \sin((2n+1)t) \end{aligned}$$

ist stetig auf dem Intervall $[0, \pi/2]$. Für $t \neq 0$ ist dies klar, für $t = 0$ folgt dies aus

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1, \text{ und } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x \pm 2t) - f(x^\pm)}{2t} = f'(x^\pm).$$

Mit Lemma 5 erhalten wir die punktweise Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = 0.$$

Aus dem Beweis des Lemmas 5 folgt, dass die Konvergenz aus jedem abgeschlossenen Intervall ohne Sprungstellen von f gleichmäßig ist. \square

Beispiel 16 (Fourierreihe des Sägezahns). Die Fourierreihe der 2π -periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x + 2k\pi) = x$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in [-\pi, \pi)$ konvergiert punktweise gegen die Funktion

$$x + 2k\pi \mapsto \begin{cases} 0 & (x = -\pi, k \in \mathbb{Z}) \\ x & (x \in (-\pi, \pi), k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Das bedeutet, dass für $x = (2k + 1)\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ die Fourierreihe von f nicht gegen $f(x)$ konvergiert, sondern gegen den Mittelwert des rechts- und linksseitigen Grenzwertes von f im Punkt $(2k+1)\pi$. Aber in $x = \pi/2$ konvergiert die Fourierreihe gegen $f(x)$ und wir erhalten eine Reihenentwicklung für π durch

$$\begin{aligned} f(\pi/2) &= \frac{\pi}{2} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(n\pi/2)}{n} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{2m+1+1} \frac{(-1)^m}{2m+1} \\ \frac{\pi}{4} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}. \end{aligned}$$

1.8. Integration von Fourierreihen. Da die Konvergenz der Fourierreihe einer stückweise stetigen und stückweise differenzierbaren Funktion auf jedem Stetigkeitsintervall gleichmäßig ist, kann man die Fourierreihe auf diesen Intervallen gliedweise integrieren.

Beispiel 17 (Fourierreihe der Dreiecksfunktion). Aus Beispiel 14 wissen wir, dass die Fourierreihe

$$\frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)x}{2m+1} = -\chi_{(-\pi,0)} + \chi_{(0,\pi)},$$

also punktweise gegen die 2π -periodische Funktion g mit

$$g(x + 2\pi k) = \begin{cases} 1 & , x \in (0, \pi), k \in \mathbb{Z} \\ -1 & , x \in (-\pi, 0), k \in \mathbb{Z} \\ 0 & , x \in \{-\pi, 0\}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

konvergiert. Da die Konvergenz auf jedem abgeschlossenen Intervall, das keine ganzzahligen Vielfachen von π enthält, gleichmäßig ist, erhalten wir durch gliedweise Integration die Fourierreihe von $\int g(x) dx = f(x)$, wobei $f(x)$ die Dreieckskurve aus Beispiel 7 ist. Nur den Fourierkoeffizienten a_0 der Fourierreihe von f können wir nicht durch Integration der Fourierreihe von g bestimmen. Wir berechnen

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{1}{\pi} \pi^2 = \pi.$$

Also

$$f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos((2m+1)x)}{(2m+1)^2} \text{ auf } [-\pi, \pi]$$

und die Fourierreihe der Dreieckskurve f konvergiert auf ganz \mathbb{R} gleichmäßig gegen f , da f stetig ist.

Beispiel 18 (Fourierreihe der 2π -periodischen Fortsetzung von x^2). Die Fourierreihe der 2π -periodischen Fortsetzung von $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, erhalten wir durch

Integration des Doppelten der Sägezahnkurve, da $(x^2)' = 2x$. Also

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx + 2 \int 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n} dx = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

Warnung: Auch auf einem abgeschlossenem Stetigkeitsintervall gilt $f'(x) \sim (\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))' = \sum_{n=1}^{\infty} -a_n n \sin(nx) + b_n n \cos(nx)$ nur, wenn f stetig ist. Zum Beispiel gilt zwar $x' = 1$ auf dem Intervall $(-\pi, \pi)$ aber die Ableitung der Fourierreihe der Sägezahnkurve ist

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{\sin nx}{n} \right)' = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos(nx) \not\sim 1,$$

also nicht die Fourierreihe der konstanten Funktion $f(x) \equiv 1$.

Satz 3. Wenn f L -periodisch, $f'(x)$ stückweise stetig und

$$f'(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x),$$

dann

$$f(x) \sim \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) dx + \frac{1}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_0(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\omega x) - \frac{b_n}{n} \cos(n\omega x).$$

Beweis. Der Summand $\frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) dx$ ist der konstante Anteil der Fourierreihe der Funktion f . Außerdem gilt

$$\frac{a_n}{n\omega} \sin(n\omega x) = \int a_n \cos(n\omega x) dx, \quad -\frac{b_n}{n\omega} \cos(n\omega x) = \int b_n \sin(n\omega x) dx$$

und $a_0 x/2 = \int a_0/2 dx$ mit $L = 2\pi/\omega$. Die Fourierreihe der L -periodischen Fortsetzung von $x \mapsto x$ für $-L/2 \leq x < L/2$ ist

$$\frac{2}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\omega x).$$

□

1.9. Komplexe Darstellung der Fourierreihe. Wir betrachten eine komplexwertige, 2π -periodische Funktion f , also $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und $f(x + 2\pi k) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Da $f = \Re(f) + i\Im(f)$, erweitern wir die Definition einer Fourierreihe für komplexwertige Funktionen in natürlicher Weise.

Definition 6. Die **Fourierreihe** einer 2π -periodischen, komplexwertigen, integrierbaren Funktion f ist

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

mit den **Fourierkoeffizienten** $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ gegeben durch

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Alle Sätze über Fourierreihen reellwertiger Funktionen, insbesondere die Konvergenzaussagen, übertragen sich auf Fourierreihen komplexwertiger Funktionen. Wir können die Fourierreihe auch mit Hilfe der Grundfunktionen e^{inx} schreiben.

Satz 4. *Es sei*

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

die Fourierreihe einer 2π -periodischen, integrierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Dann gilt

$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} \text{ mit } c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= \Re(e^{inx}) = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) \\ \sin(nx) &= \Im(e^{inx}) = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}). \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) &= \frac{a_n}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) - \frac{ib_n}{2}(e^{inx} - e^{-inx}) \\ &= \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \end{aligned}$$

$$\frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos(nx) - i \sin(nx)) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

$$\frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos(nx) + i \sin(nx)) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx$$

□

Definition 7. Die komplexe Darstellung der Fourierreihe einer 2π -periodischen, integrierbaren Funktion f ist die Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) \text{ mit } c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Es gelten für alle $k \in \mathbb{N}$ die Beziehungen

$$(4) \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, a_k = 2\Re(c_k), b_k = -2\Im(c_k).$$

Beispiel 19. Wir berechnen die komplexe und die reelle Form der Fourierreihe der 2π -periodischen Fortsetzung der Funktion $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\alpha x}$, mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Da f auf dem Intervall $(-\pi, \pi)$ stetig ist, gilt dort $e^{\alpha x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ mit

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(\alpha - in)x} dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{\alpha - in} e^{(\alpha - in)x} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi(\alpha - in)} (e^{(\alpha - in)\pi} - e^{-(\alpha - in)\pi}) \\ &= \frac{1}{2\pi(\alpha - in)} (-1)^n (e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}) = \frac{(\alpha + in)(-1)^n}{\pi(\alpha^2 + n^2)} \sinh(\alpha\pi), \end{aligned}$$

also

$$e^{\alpha x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(\alpha + in)(-1)^n}{\pi(\alpha^2 + n^2)} \sinh(\alpha\pi) e^{inx}$$

und

$$e^{\alpha x} = \frac{\sinh(\alpha\pi)}{\pi\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha \sinh(\alpha\pi)(-1)^n}{\pi(\alpha^2 + n^2)} \cos(nx) + \frac{2n \sinh(\alpha\pi)(-1)^{n+1}}{\pi(\alpha^2 + n^2)} \sin(nx).$$

Die **Orthogonalitätsrelationen** lassen sich mit Hilfe der Grundfunktionen e^{inx} besonders elegant schreiben. Es gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{e^{ikx}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x} dx = \begin{cases} 1 & (n = k) \\ \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i(n-k)} [e^{i(n-k)x}]_{-\pi}^{\pi} = 0 & (n \neq k) \end{cases},$$

da $e^{i\pi} = e^{-i\pi}$.

Satz 5 (Besselsche Ungleichung). *Für jede 2π -periodische, stückweise stetige Funktion f mit der Fourierreihe*

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Besselsche Ungleichung

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^N (|a_n|^2 + |b_n|^2) = 2 \sum_{n=-\infty}^N |c_n|^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Beweis. Wir betrachten die endlichen Partialsummen der Fourierreihe $S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{S_N(x)} dx &= \sum_{n=-N}^N \frac{\overline{c_n}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \sum_{n=-N}^N \overline{c_n} c_n = \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_N(x) \overline{S_N(x)} dx &= \sum_{n=-N}^N c_n \overline{c_n} = \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_N(x)) \overline{(f(x) - S_N(x))} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 - S_N(x) \overline{f(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \end{aligned}$$

für alle $N \in \mathbb{N}$. □

1.10. Rechenregeln - zweiter Teil. Mit Hilfe der komplexen Darstellung der Fourierreihe läßt sich die Berechnung der Fourierreihe einer Funktion vereinfachen. Es sei $f \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$ die Fourierreihe einer 2π -periodischen, integrierbaren Funktion f .

1.10.1. Konjugation. Die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(t) = \overline{f(t)}$, ist ebenfalls 2π -periodisch und integrierbar und hat die Fourierreihe

$$\overline{f(t)} \sim \overline{c_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c_{-n}} e^{int} + \overline{c_n} e^{-int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{c_{-n}} e^{int},$$

denn $\overline{f(t) e^{int}} = \overline{f(t)} e^{-int}$.

1.10.2. *Zeitumkehr.* Die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(t) = f(-t)$, ist ebenfalls 2π -periodisch und integrierbar und hat die Fourierreihe

$$f(-t) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{int} + c_n e^{-int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} e^{int},$$

denn

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = - \int_{\pi}^{-\pi} f(-x) e^{inx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(-x) e^{inx} dx.$$

1.10.3. *Verschiebung im Zeitbereich.* Die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(t) = f(t+a)$ mit $a \in \mathbb{R}$, ist ebenfalls 2π -periodisch und integrierbar und hat die Fourierreihe

$$f(t+a) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{ina} c_n) e^{inx},$$

denn

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t+a) e^{-int} dt = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x) e^{-in(x-a)} dx = e^{ina} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

und der Integrand ist 2π -periodisch.

Beispiel 20 (verschobener Rechteckimpuls). Für eine reelle Zahl $a \in (0, \pi)$ wollen wir die Fourierreihe der Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(t+2\pi k) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [-a, \pi-a], k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{für } t \in [-\pi, -a) \cup [\pi-a, \pi), k \in \mathbb{Z} \end{cases},$$

also die 2π -periodische Fortsetzung der charakteristischen Funktion $\chi_{[-a, \pi-a]}$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi)$ berechnen. Es gilt $g(t) = f(t+a)$, wobei f der Rechteckimpuls aus Beispiel 5 und Beispiel 9 ist. Also $f(t) = 1$ für $x \in [0, \pi)$ und $f(t) = 0$ für $x \in [-\pi, 0)$ mit der Fourierreihe

$$f(t) \sim \frac{1}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2 \sin((2m+1)x)}{\pi(2m+1)} = \frac{1}{2} + \frac{i}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-i(2m+1)x} - e^{i(2m+1)x}}{(2m+1)}.$$

Mit der Formel für die Verschiebung im Zeitbereich erhalten wir die komplexe Form

$$g(t) = f(t+a) \sim \frac{1}{2} + \frac{i}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-i(2m+1)a} e^{-i(2m+1)x} - e^{i(2m+1)a} e^{i(2m+1)x}}{(2m+1)}$$

oder mit Hilfe der Additionstheoreme die reelle Form

$$\begin{aligned} g(t) = f(t+a) &\sim \frac{1}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2 \sin((2m+1)(x+a))}{\pi(2m+1)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2m+1)a) \cos((2m+1)x) + \cos((2m+1)a) \sin((2m+1)x)}{2m+1}. \end{aligned}$$

1.10.4. *Verschiebung im Frequenzbereich.* Die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(t) = e^{ikt}f(t)$ mit $k \in \mathbb{Z}$, ist ebenfalls 2π -periodisch und integrierbar und hat die Fourierreihe

$$e^{ikt}f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n-k}e^{inx},$$

denn

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}f(t)e^{-int} dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-i(n-k)t} dt.$$

1.11. Das periodische Faltungsprodukt.

Definition 8. Das **Faltungsprodukt** $f * g$ zweier stückweise stetiger, 2π -periodischer Funktionen f und g ist die 2π -periodische Funktion

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x)g(x) dx.$$

Lemma 6. Das periodische Faltungsprodukt ist assoziativ, distributiv und kommutativ, d.h. für stückweise stetige, 2π -periodische Funktionen f, g, h gilt

$$f * (g * h) = (f * g) * h, \quad f * (g + h) = (f * g) + (f * h), \quad f * g = g * f.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x)g(x) dx = -\frac{1}{2\pi} \int_{t+\pi}^{t-\pi} f(y)g(t-y) dy \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{-\pi} f(y)g(t-y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(t-y) dy = (g * f)(t) \end{aligned}$$

mit der Koordinatentransformation $y = t-x$, da f und g 2π -periodische Funktionen sind.

Das Distributivgesetz $f*(g+h) = (f*g)+(f*h)$ folgt direkt aus der Additivität des Integrals $\int f(t-x)(g(x) + h(x)) dx = \int f(t-x)g(x) dx + \int f(t-x)h(x) dx$.

Zum Beweis des Assoziativgesetzes benötigen wir einen Satz über die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge aus der Integralrechnung mehrerer Veränderlicher. Damit gilt

$$\begin{aligned} f * (g * h)(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x)(g * h)(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x-y)h(y) dy dx \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x)g(x-y)h(y) dy dx \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x)g(x-y)h(y) dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(y) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-y-(x-y))g(x-y) dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(y) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(t-y-\tilde{x})g(\tilde{x}) d\tilde{x} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(y) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-y-\tilde{x})g(\tilde{x}) d\tilde{x} dy \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(y) \frac{1}{2\pi} (f * g)(t - y) dy = ((f * g) * h)(t)$$

□

Satz 6. *Das periodische Faltungsprodukt glättet, d.h. wenn f eine (stückweise) stetige und g eine k -mal (stückweise) stetig differenzierbare Funktion ist, dann ist auch $f * g$ eine k -mal stetig differenzierbare Funktion.*

Beweis. Wenn f (stückweise) stetig ist, so ist f auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ beschränkt durch eine Konstante S . Auch jede der Ableitungen $g^{(j)}$ ist auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ durch eine Konstante $M^{(j)}$ beschränkt. Also gilt

$$\begin{aligned} |(f * g)(t + h) - (f * g)(t)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (g(t + h - x) - g(t - x)) f(x) dx \right| \\ &\leq \frac{S}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t + h - x) - g(t - x)| dx \\ &= h \frac{S}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g'(t - x + \xi_1 h)| dx \end{aligned}$$

usw. nach dem Mittelwertsatz für g . Das Integral über ein kleines Intervall um eine Sprungstelle y_0 von $g^{(j)}$ schätzt man durch

$$\int_{y_0-h}^{y_0+h} |g^{(j)}(y + \xi_1 \dots \xi_j h) - g^{(j)}(y)| dy \leq h M^{(j)}$$

ab. Auf den restlichen Intervallen ist die zu integrierende Funktion stetig und man hat gleichmäßige Konvergenz, also

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t + h - x) - g(t - x)| dx = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} |g'(t + \xi h - x) - g'(t - x)| dx = 0 \dots$$

□

Satz 7 (Fourierreihe des Faltungsprodukts). *Wenn f und g stückweise stetige, 2π -periodische Funktionen mit den Fourierreihen*

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad \text{und} \quad g \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikx}$$

*sind, dann hat das Faltungsprodukt $f * g$ die Fourierreihe*

$$f * g \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_k e^{ikx}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(x) e^{-ikx} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t - x) g(x) dx \right) e^{-ikt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t - x) e^{-int} e^{ikx} dt \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t - x) e^{-ik(t-x)} dt \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx} c_k dx = \frac{c_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx} dx = c_k d_k. \end{aligned}$$

□

1.12. Vollständigkeit und Eindeutigkeit.

Satz 8 (Vollständigkeitsatz). *Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine 2π -periodische, stückweise stetige Funktion. Wenn f in den Sprungstellen die Mittelwertbedingung erfüllt,*

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

und alle Fourierkoeffizienten von f verschwinden,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

dann gilt $f(x) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Natürlich gilt der Satz für stückweise stetig differenzierbare Funktionen f , weil dann die Fourierreihe von f punktweise gegen f konvergiert.

Angenommen $f(x_0) > 0$ in einer Stetigkeitsstelle x_0 . Dann falten wir f mit einer „cut-off“-Funktion φ . D.h. φ ist glatt, 2π -periodisch, $\varphi(x_0) = 1$ und verschwindet außerhalb einer kleinen Umgebung U_0 von x_0 , auf der f positiv ist. Nach der Formel für die Fourierkoeffizienten des Faltungsproduktes (Satz 7) verschwinden alle Fourierkoeffizienten von $f * \varphi$. Dies ist ein Widerspruch, da die Funktion $f * \varphi$ stetig differenzierbar ist, also durch ihre Fourierreihe dargestellt wird, und

$$(f * \varphi)(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - x) \varphi(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{U_0} f(x_0 - x) \varphi(x) dx > 0.$$

□

Folgerung 3 (Eindeutigkeitsatz). *Haben zwei stückweise stetige Funktionen dieselben Fourierkoeffizienten und erfüllen die Mittelwertbedingung an allen Sprungstellen, so sind sie identisch.*

Beweis. Die Funktion $f - g$ erfüllt die Voraussetzungen des Vollständigkeitsatzes.

□

Folgerung 4 (Konvergenz der Fourierreihe des Faltungsproduktes). *Es seien f und g zwei stückweise stetige, 2π -periodische Funktionen mit den Fourierreihen $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ bzw. $g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}$. Dann konvergiert die Fourierreihe des Faltungsproduktes $f * g$ stets gleichmäßig und es gilt*

$$(f * g)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n e^{int}.$$

Beweis. Aus $0 \leq (|c_n| - |d_n|)^2$ folgt $2|c_n d_n| \leq |c_n|^2 + |d_n|^2$. Aus der Besselschen Ungleichung, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 + |d_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 + |g(x)|^2 dx$, folgt, dass die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n e^{int}$ gleichmäßig konvergiert, da $|c_n d_n e^{int}| = |c_n d_n|$. Mit dem Eindeutigkeitsatz folgt dann, dass das Faltungsprodukt $f * g$ durch seine Fourierreihe dargestellt wird.

□

Folgerung 5 (Vollständigkeitsrelation, Parsevalsche Gleichung). *Für zwei stückweise stetige, 2π -periodische Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit den Fourierreihen*

$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ und $g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}$ gilt:

$$(5) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \bar{d}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$(6) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

Beweis. Wir betrachten die Faltung der Funktionen f und h mit $h(x) = \overline{g(-x)}$. Die Funktion h entsteht durch Zeitumkehr und Konjugation aus g . Also hat h die Fourierreihe $h(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{d}_{-(-n)} e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{d}_n e^{inx}$. Darum gilt

$$(f * h)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) h(t-x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x-t)} dx \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \bar{d}_n e^{int}.$$

Die erste Gleichung folgt mit $t = 0$ und die zweite Gleichung mit $f = g$. □

Die Gleichung

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

heißt **Parsevalsche Gleichung**. Ihre reelle Form ist für reellwertige, stückweise stetige, 2π -periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Fourierreihe $a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ ist

$$f(x) \sim \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx.$$

Beispiel 21 (Reihenentwicklung für π^2 aus der Fourierreihe der Sägezahnkurve). Auf dem Intervall $(-\pi, \pi)$ gilt

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

Aus der Parsevalschen Gleichung folgt

$$4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{3\pi} [x^3]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^2, \quad \text{also} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6} \pi^2.$$

1.13. Fourierreihenansatz bei Differentialgleichungen. Wir betrachten lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und periodischem inhomogenem Anteil der Form $y'' + \omega_0^2 y = f(x)$ mit $\omega_0 > 0$, wobei f eine L -periodische, stückweise stetige und stückweise glatte Funktion ist.

Da das zur homogenen Differentialgleichung $y'' + \omega_0^2 y = 0$ gehörende charakteristische Polynom $\lambda^2 + \omega^2$ die komplexen Nullstellen $\pm i\omega_0$ besitzt, hat die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y'' + \omega_0^2 y = 0$ die Form

$$y_h(x) = c_1 \cos(\omega_0 x) + c_2 \sin(\omega_0 x)$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Wir entwickeln die Funktion f in eine Fourierreihe

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega x) + B_n \sin(n\omega x), \quad \omega = \frac{2\pi}{L},$$

und machen für die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $y'' + \omega_0 y = f(x)$ einen Fourierreihenansatz mit der Periode L :

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$$

Setzen wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung ein und nehmen an, dass die Reihe zweimal stetig differenzierbar ist. So erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{A_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega x) + B_n \sin(n\omega x) \\ &\quad + \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \right)'' \\ &\quad + \omega_0^2 \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \right) \\ &= \frac{\omega_0^2 a_0 - A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} ((\omega_0^2 - n^2 \omega^2) a_n - A_n) \cos(n\omega x) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} ((\omega_0^2 - n^2 \omega^2) b_n - B_n) \sin(n\omega x). \end{aligned}$$

Falls $\omega_0 \neq n\omega$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ (keine Resonanz), so können wir aus dieser Reihenentwicklung die Koeffizienten a_n und b_n bestimmen. Es gilt

$$a_0 = \frac{A_0}{\omega_0^2}, \quad a_n = \frac{A_n}{\omega_0^2 - n^2 \omega^2}, \quad b_n = \frac{B_n}{\omega_0^2 - n^2 \omega^2}.$$

Falls $\omega_0 = k\omega$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ (Resonanz), so ändern wir den Ansatz in

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1, n \neq k}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) + a_k x \cos(k\omega x) + b_k x \sin(k\omega x)$$

und erhalten für die speziellen Koeffizienten a_k und b_k die Gleichungen

$$A_k \cos(k\omega x) + B_k \sin(k\omega x) = -2a_k k\omega \sin(k\omega x) + 2b_k k\omega \cos(k\omega x),$$

also $a_k = -B_k/(2k\omega)$ und $b_k = A_k/(2k\omega)$.

2. ORTHONORMALSYSTEME

Wir werden sehen, dass die Fourierkoeffizienten „nur“ die Koordinaten der Funktion bezüglich eines rechtwinkligen Koordinatensystems sind.

2.1. Vektorräume.

Definition 9. Ein reeller (komplexer) Vektorraum V ist eine Menge mit zwei Operationen, der Addition von Vektoren

$$(v, w) \mapsto v + w \text{ für } v, w \in V$$

und der Multiplikation von Vektoren mit Skalaren

$$(\lambda, v) \mapsto \lambda v \text{ für } v \in V, \lambda \in \mathbb{R} (\lambda \in \mathbb{C}),$$

so dass $v + w = w + v$, $\lambda(w + v) = \lambda w + \lambda v$ und $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$ für alle $v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (bzw. \mathbb{C}).

Beispiel 22. Der \mathbb{R}^n , der Raum aller n -Tupel reeller Zahlen, ist ein reeller Vektorraum. Addition und Skalarmultiplikation sind komponentenweise definiert, also

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad \lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

für alle $x_j, y_j, \lambda \in \mathbb{R}$.

Beispiel 23. Der \mathbb{C}^n , der Raum aller n -Tupel komplexer Zahlen, ist ein komplexer Vektorraum. Addition und Skalarmultiplikation sind komponentenweise definiert, also

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad \lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

für alle $x_j, y_j, \lambda \in \mathbb{C}$.

Beispiel 24 (Vektorraum stetiger Funktionen). Auch die auf einem Intervall stetigen Funktionen bilden einen Vektorraum. Die Summe zweier Funktionen f und g ist definiert durch $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Die Multiplikation einer Funktion f mit einer reellen oder komplexen Zahl λ ist die Funktion $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$. Aus der Stetigkeit von f und g folgt die Stetigkeit von $f + g$ und λf .

Wir benutzen die Bezeichnungen $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ und $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ für die Vektorräume reellwertiger bzw. komplexwertiger stetiger Funktion auf einem Intervall $[a, b]$.

2.2. Normierte Vektorräume. Wir möchten die Länge von Vektoren bzw. den Abstand zweier Vektoren v und w , also die Länge der Differenz $v - w$, messen können. Dazu definieren wir eine Norm auf dem Vektorraum.

Definition 10. Eine Norm auf einem reellen Vektorraum V ist eine Abbildung $V \rightarrow \mathbb{R}$, $v \mapsto \|v\|$, mit folgenden Eigenschaften:

- *Positivität:* $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$ und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- *Ähnlichkeit:* $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ für alle $v \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$
- *Dreiecksungleichung:* $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$

Beispiel 25 (Euklidische Norm). Auf dem reellen Vektorraum \mathbb{R}^n ist durch

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

eine Norm definiert. Auf dem komplexen Vektorraum \mathbb{C}^n ist durch

$$\|(z_1, \dots, z_n)\| = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2} = \sqrt{z_1 \bar{z}_1 + \dots + z_n \bar{z}_n}$$

eine Norm definiert. Wir überprüfen die drei Eigenschaften Positivität, Ähnlichkeit und die Dreiecksungleichung. Sie folgen aus den entsprechenden Eigenschaften für die Betragsfunktion der reellen Zahlen.

- **Positivität:** Es sei $x = (x_1, \dots, x_n)$ ein Vektor im \mathbb{R}^n . Dann gilt $\|x\| \geq 0$, da $x_j^2 \geq 0$ für alle j . Außerdem gilt $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x_j = 0$ für alle j , also $x = 0$.
- **Ähnlichkeit:** Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \sqrt{|\lambda x_1|^2 + \dots + |\lambda x_n|^2} = \sqrt{\lambda^2 |x_1|^2 + \dots + \lambda^2 |x_n|^2} \\ &= \sqrt{|\lambda|^2 (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)} = |\lambda| \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} = |\lambda| \|x\| \end{aligned}$$

- **Dreiecksungleichung:** Für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{j \neq k} (x_j y_k - x_k y_j)^2 \\ 2 \sum_{j \neq k} x_j y_j x_k y_k &\leq \sum_{j \neq k} x_j^2 y_k^2 + x_k^2 y_j^2 \\ \sum_{j,k=1}^n x_j y_j x_k y_k &\leq \sum_{j,k=1}^n x_j^2 y_k^2 \\ \sum_{j,k=1}^n x_j y_j x_k y_k &\leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) \\ 2 \sum_{j=1}^n x_j y_j &\leq 2 \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2} \\ (x_1 + y_1)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2 &\leq \sum_{j=1}^n x_j^2 + \sum_{j=1}^n y_j^2 + 2 \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2} \\ \|x + y\|^2 &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Beispiel 26 (Maximumnorm). Auf den Vektorräumen $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ und $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ ist durch $\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$ eine Norm definiert.

Auch auf den endlich dimensionalen Vektorräumen \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n kann man durch $\|(x_1, \dots, x_n)\| := \max\{x_j : j = 1, \dots, n\}$ eine Norm definieren, die der Maximumnorm auf dem unendlich dimensionalen Vektorraum $\mathcal{C}([a, b])$ entspricht.

Wir überprüfen Positivität, Ähnlichkeit und die Dreiecksungleichung für die Definition der Maximumnorm auf $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Für alle $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ gilt $\|f\|_\infty \geq 0$, denn $|f(x)| \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Außerdem ist $\|f\|_\infty = 0$ genau dann, wenn $|f(x)| = 0$ für alle $x \in [a, b]$, also $f \equiv 0$. Die Ähnlichkeit der Maximumnorm folgt direkt aus $|\lambda f(x)| = |\lambda| |f(x)|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in [a, b]$. Die Dreiecksungleichung gilt für die Maximumnorm, weil $\max\{|f(x) + g(x)| : x \in [a, b]\} \leq \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\} + \max\{|g(x)| : x \in [a, b]\}$ für alle $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

2.3. Umgebungen und Konvergenz. Wenn man den Begriff der Norm hat, dann kann man Umgebungen (eine Topologie) definieren und Konvergenz diskutieren. Einen Vektorraum, der mit einer Norm $\|\cdot\|$ ausgestattet ist, nennt man einen normierten Vektorraum.

Definition 11. Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, $\varepsilon > 0$ und $x \in V$. Die ε -Umgebung $U_\varepsilon(x)$ von x ist die Menge aller Punkte in V , deren Abstand von x kleiner als ε ist, also

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in V : \|x - y\| < \varepsilon\}.$$

Definition 12. Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Eine Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ konvergiert gegen $f \in V$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ fast alle Folgenglieder in $U_\varepsilon(f)$ liegen.

Die ε -Umgebung bezüglich der euklidischen Norm in \mathbb{R}^n ist wirklich ein offener Ball vom Radius ε . Die ε -Umgebung bezüglich der Maximumnorm in \mathbb{R}^n ist ein offener Würfel mit Seitenlänge 2ε . Auf \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n führen alle Normen zu äquivalenten Konvergenzbegriffen, auch wenn die ε -Umgebungen verschieden aussehen. Zur Maximumnorm auf $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ gehört die gleichmäßige Konvergenz von Funktionen.

Lemma 7 (Komponentenweise Konvergenz in \mathbb{R}^n). Eine Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann gegen $y \in \mathbb{R}^n$ (bezüglich der euklidischen Norm), wenn $x_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n})$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ und für jedes $j = 1, \dots, n$ die Folge reeller Zahlen $\{x_{k,j}\}_{k \in \mathbb{N}}$ gegen y_j konvergiert.

Beweis. Es gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y\| = 0$ genau dann, wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{k,j} - y_j)^2 = 0$ für alle j . \square

2.4. Skalarprodukt. In vielen Fällen wird die Norm durch ein Skalarprodukt gegeben, das uns dann sogar erlaubt, Winkel und Längen zu messen.

Definition 13. Ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum V ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- *Symmetrie:* $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ für alle $v, w \in V$
- *Linearität:* $\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle = \lambda_1 \langle v_1, w \rangle + \lambda_2 \langle v_2, w \rangle$ für alle $v_1, v_2, w \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
- *Positivität:* $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$ und $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Beispiel 27 (Euklidisches Skalarprodukt). Auf dem reellen Vektorraum \mathbb{R}^n kennen wir das euklidische Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ für $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Beispiel 28 (Konvergenz im quadratischen Mittel für reellwertige Funktionen). Auf dem Funktionenraum $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ wird durch

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

ein Skalarprodukt definiert. Wir überprüfen

- Symmetrie: $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b g(x)f(x) dx = \langle g, f \rangle$,
- Linearität:

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g \rangle &= \int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))g(x) dx \\ &= \lambda_1 \int_a^b f_1(x)g(x) dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)g(x) dx \\ &= \lambda_1 \langle f_1, g \rangle + \lambda_2 \langle f_2, g \rangle \end{aligned}$$

und

- **Positivität:** $\langle f, f \rangle = \int_a^b f(x)^2 dx \geq 0$, da $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, und $\int_a^b f(x)^2 dx = 0$ genau dann, wenn $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$. Hier ist es wichtig, dass f stetig ist. Wenn $f(x)^2 > 0$ für ein x , so ist $f(x)^2 > 0$ in einer Umgebung U von x und damit $\int_a^b f(x)^2 dx \geq \int_U f(x)^2 dx > 0$.

Definition 14. Ein hermitesches Skalarprodukt auf einem komplexen Vektorraum V ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- **Symmetrie:** $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ für alle $v, w \in V$
- **Linearität:** $\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle = \lambda_1 \langle v_1, w \rangle + \lambda_2 \langle v_2, w \rangle$ für alle $v_1, v_2, w \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$
- **Positivität:** $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$ und $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Aus der Symmetrie und der Linearität folgt für ein hermitesches Skalarprodukt $\langle v, \lambda w \rangle = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Weiterhin sichern Symmetrie und Linearität, dass $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$ und die Positivitätsbedingung sinnvoll ist.

Beispiel 29 (Hermitesches Skalarprodukt auf \mathbb{C}^n). Auf dem komplexen Vektorraum \mathbb{C}^n kennen wir das hermitesche Skalarprodukt $\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \overline{w_j}$ für $z = (z_1, \dots, z_n)$ und $w = (w_1, \dots, w_n)$.

Beispiel 30 (Konvergenz im quadratischen Mittel für komplexwertige Funktionen). Auf dem Funktionenraum $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ wird durch

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

ein hermitesches Skalarprodukt definiert.

Satz 9. Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein (hermitesches) Skalarprodukt auf einem Vektorraum V . Dann definiert $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ eine Norm auf V . Außerdem gilt die Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\| \text{ für alle } v, w \in V.$$

Beweis. Wir überprüfen die Eigenschaften der so definierten Norm:

- Positivität der Norm folgt direkt aus der Positivität des Skalarproduktes.
- Ähnlichkeit der Norm folgt direkt aus der Linearität des Skalarproduktes:
 $\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle v, v \rangle} = |\lambda| \|v\|$
- Wir beweisen die Schwarzsche Ungleichung: Falls $w = 0$, so gilt die Ungleichung, weil $\langle v, 0 \rangle = 0$ und $\|0\| = 0$. Falls $\|w\| \neq 0$, so betrachten wir den Hilfsvektor $h := w/\|w\|$. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|v - \langle v, h \rangle h\|^2 = \langle v - \langle v, h \rangle h, v - \langle v, h \rangle h \rangle \\ 0 &\leq \langle v, v \rangle - 2\langle v, h \rangle^2 + \langle v, h \rangle^2 \langle h, h \rangle = \langle v, v \rangle - \langle v, h \rangle^2 \\ \langle v, h \rangle^2 &\leq \langle v, v \rangle = \|v\|^2, \end{aligned}$$

da $\langle h, h \rangle = 1$. Nun setzen wir wieder $h = w/\|w\|$ und multiplizieren die Gleichung mit $\|w\|^2$. So erhalten wir

$$\langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \|w\|^2.$$

Durch Ziehen der Wurzel ergibt sich die Schwarzsche Ungleichung.

- Die Dreiecksungleichung erhalten wir mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|v + w\| &= \sqrt{\langle v + w, v + w \rangle} = \sqrt{\langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle} \\ &= \sqrt{\|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\Re(\langle v, w \rangle)} \leq \sqrt{\|v\|^2 + \|w\|^2 + 2|\langle v, w \rangle|} \\ &\leq \sqrt{\|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\|w\|} = \sqrt{(\|v\| + \|w\|)^2} = \|v\| + \|w\| \end{aligned}$$

□

Das Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} dx$ induziert also die Norm $\|f\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx}$ und eine Funktionenfolge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert bezüglich dieser Norm gegen eine Funktion f , wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$. Da $\|f_n - f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|^2 dx$ ist die Bezeichnung „Konvergenz im quadratischen Mittel“ gerechtfertigt.

Bemerkung 1. Die gleichmäßige Konvergenz ist stärker als die Konvergenz im quadratischen Mittel. Wenn eine Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ stetiger Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$ gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert, so konvergiert sie auch im quadratischen Mittel gegen f , denn aus $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$ folgt $\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx < (b - a)\varepsilon^2$. Die Umkehrung gilt nicht, wie man leicht an der Folge $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ mit

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{für } x \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{für } x \in [1/n, 1] \end{cases}$$

sehen kann, die zwar im quadratischen Mittel aber nicht punktweise gegen $g(x) \equiv 0$ konvergiert.

Definition 15. Es sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt \langle, \rangle . Zwei Vektoren $v, w \in V$ stehen **senkrecht** aufeinander, sind **orthogonal** zueinander, wenn $\langle v, w \rangle = 0$. Ein Vektor $v \in V$ heißt **normiert**, wenn $\|v\| = 1$.

Beispiel 31 (Orthogonalitätsrelationen). Wir betrachten das Skalarprodukt aus Beispiel 28. Die Vektoren $\sin(nx)$ und $\cos(mx)$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ stehen paarweise senkrecht aufeinander als Elemente in $\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt aus Beispiel 28. Die Elemente $\sin(nx)/\sqrt{\pi}$ und $\cos(nx)/\sqrt{\pi}$ haben für alle $n \in \mathbb{N}$ die Länge 1.

Die Vektoren e^{inx} mit $n \in \mathbb{N}$ stehen ebenfalls paarweise senkrecht aufeinander als Elemente in $\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ mit dem Skalarprodukt aus Beispiel 30. Die Elemente $e^{inx}/\sqrt{2\pi}$ haben für alle $n \in \mathbb{Z}$ die Länge 1.

2.5. Orthonormalsysteme.

Definition 16. Es sei V ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt \langle, \rangle . Eine Menge von Vektoren $\{v_j\} \subset V$ heißt **Orthonormalsystem**, wenn die Vektoren normiert sind und paarweise senkrecht aufeinander stehen, also $\langle v_j, v_k \rangle = \delta_{jk}$.

Beispiel 32 (Standardbasis in \mathbb{R}^n). Die Standardeinheitsvektoren $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ bilden ein Orthonormalsystem.

Beispiel 33 (Harmonische Schwingungen). Bezüglich des Skalarprodukts aus Beispiel 30 sind die Mengen

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \quad \text{und} \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Orthonormalsysteme.

Lemma 8. *Ein Orthonormalsystem ist linear unabhängig.*

Beweis. Wenn $\sum_{j=1}^N a_j v_j = 0$ und $\{v_j : j = 1, \dots, N\}$ ist ein Orthonormalsystem, dann $0 = \langle v_k, \sum_{j=1}^N a_j v_j \rangle = a_k$ für alle $k = 1, \dots, N$. \square

Bemerkung 2. Aus jeder Menge linear unabhängiger Vektoren kann man mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens ein Orthonormalsystem konstruieren.

Satz 10 (Besselsche Ungleichung). *Es sei $\{v_j : j \in \mathbb{N}\} \subset V$ ein Orthonormalsystem. Dann gilt für jedes $v \in V$ die Besselsche Ungleichung*

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} |\langle v, v_j \rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

und $\sum_{j=1}^N \langle v, v_j \rangle v_j$ ist die beste Approximation von v im Untervektorraum, der von $\{v_1, \dots, v_N\}$ aufgespannt wird.

Beweis. Es gilt

$$0 \leq \|v - \sum_{j=1}^N \langle v, v_j \rangle v_j\|^2 = \langle v - \sum_{j=1}^N \langle v, v_j \rangle v_j, v - \sum_{j=1}^N \langle v, v_j \rangle v_j \rangle = \langle v, v \rangle - \sum_{j=1}^N |\langle v, v_j \rangle|^2,$$

da $\langle v, v_j \rangle = \overline{\langle v_j, v \rangle}$.

Um zu zeigen, dass $\sum_{j=1}^N \langle v, v_j \rangle v_j$ die beste Approximation von v ist, müssen wir die Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher benutzen. Wir wollen nämlich die Funktion $f(a_1, \dots, a_N) = \|v - \sum_{j=1}^N a_j v_j\|^2$ minimieren. Eine notwendige Bedingung für ein lokales Extremum der Funktion f ist das Verschwinden des Gradienten $(-2\langle v, v_j \rangle + 2a_j)_{j=1, \dots, N}$. Dies bedeutet $a_j = \langle v, v_j \rangle$. Man überprüft, dass für diese a_j ein Maximum der Funktion f angenommen wird, da die Hessematrix von f gerade 2Id , also positiv definit ist. \square

Bemerkung 3. Der Vektor $v - \sum_{j=1}^N \langle v, v_j \rangle v_j$ ist die Projektion von v in einen Untervektorraum, der zum Orthonormalsystem $\{v_j : j \in \mathbb{N}\} \subset V$ senkrecht steht, denn $\langle v - \sum_{j=1}^N \langle v, v_j \rangle v_j, v_k \rangle = \langle v, v_k \rangle - \sum_{j=1}^N \langle v, v_j \rangle \langle v_j, v_k \rangle = 0$ für alle k , denn $\langle v_j, v_k \rangle = \delta_{jk}$.

Definition 17. *Ein Orthonormalsystem $\{v_j\}_{j \in J}$ heißt **vollständig**, wenn für alle $v \in V$ aus $\langle v, v_j \rangle = 0 \forall j$ auch $v = 0$ folgt.*

Beispiel 34 (Harmonische Schwingungen). Die Orthonormalsysteme

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \quad \text{und} \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

sind vollständig.

Bemerkung 4. In unendlich dimensionalen Vektorräumen kann es passieren, dass eine unendliche Summe von Vektoren, z.B. $\sum_{j=0}^{\infty} \langle v, v_j \rangle v_j$, kein Element des Vektorraumes ist. Zum Beispiel ist jede endliche Überlagerung von Sinusschwingungen der Form

$$f_N(x) := \pi - 2 \sum_{n=1}^N \frac{\sin(nx)}{n}$$

eine stetige, 2π -periodische Funktion und damit ein Vektor in $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert $\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(x)$ und die Funktionenfolge $\{f_N\}$ konvergiert punktweise gegen die Sägezahnkurve f mit $f(x) = x$ für $x \in (-\pi, \pi)$ und $f(0) = f(\pm\pi) = 0$. Jedoch ist diese Grenzfunktion f nicht mehr stetig. Man kann den normierten Vektorraum $\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ durch Hinzufügen der Grenzwerte solcher Cauchy-Folgen vervollständigen.

Folgerung 6 (Parsevalsche Gleichung). *Es sei $\{v_j : j \in \mathbb{N}\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem. Dann gilt für jedes $v \in V$ die Parsevalsche Gleichung*

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\langle v, v_j \rangle|^2 = \|v\|^2.$$

Beweis. Der Vektor $v - \sum_{j \in J} \langle v, v_j \rangle v_j$ ist senkrecht zu allen v_j . Da das Orthonormalsystem vollständig ist, muss er der Nullvektor sein, also

$$\begin{aligned} 0 &= \|v - \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle v, v_j \rangle v_j\| = \langle v - \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle v, v_j \rangle v_j, v - \sum_{j \in J} \langle v, v_j \rangle v_j \rangle \\ &= \|v\|^2 - \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle v, v_j \rangle \langle v_j, v \rangle - \sum_{j \in \mathbb{N}} \overline{\langle v, v_j \rangle} \langle v, v_j \rangle + \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle v, v_j \rangle \overline{\langle v, v_j \rangle} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} |\langle v, v_j \rangle|^2 = \|v\|^2, \end{aligned}$$

da $\langle v, v_j \rangle = \overline{\langle v_j, v \rangle}$. □

Bisher haben wir für den Vektorraum $\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ mit dem hermiteschen Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

die vollständigen Orthonormalsysteme $\{\sqrt{2}, \sqrt{2} \sin(nx), \sqrt{2} \cos(nx) : n \in \mathbb{N}\}$ und $\{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$ kennen gelernt. Die Koordinaten einer Funktion $f \in \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ bezüglich dieser Orthonormalbasis sind die Fourierkoeffizienten und man erhält die Fourierreihenentwicklung

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e^{inx} \rangle e^{inx}.$$

2.6. Approximation stetiger Funktionen durch Polynome. Wir wollen stetige, reellwertige Funktionen durch Polynome approximieren. Der Weierstraßsche Approximationssatz sichert die Existenz einer approximierenden Folge von Polynomen, erklärt aber nicht, wie man eine solche Folge konstruiert.

Satz 11 (Weierstraßscher Approximationssatz). *Zu jedem $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ gibt es eine Folge von Polynomen $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, die gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Bemerkung 5. Wenn die Folge $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, so konvergiert sie auch im quadratischen Mittel gegen f .

Die Menge der Monome $\{x^j : j \in \mathbb{N}\} = \{1, x, x^2, \dots\}$ ist linear unabhängig. Deshalb versuchen wir, aus dieser Menge ein vollständiges Orthonormalsystem des Vektorraumes $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ zu konstruieren. Wir können uns auf die Betrachtung des Intervalls $[-1, 1]$ beschränken, weil durch die Substitution $y = -1 + 2(x - a)/(b - a)$ ein Isomorphismus $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \cong \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ definiert wird

2.6.1. *Legendresche Polynome.* Zur Darstellung elektrostatischer Potentiale benötigt man Legendresche Polynome.

Wir beginnen, mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens ein Orthonormalsystem $\{\tilde{h}_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ aus der Basis $\{h_n(x) = x^n : n \in \mathbb{N}\}$ zu konstruieren:

$$\begin{aligned} \|h_0\|^2 &= \int_{-1}^1 1 dx = 2, & \tilde{h}_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \langle h_1, \tilde{h}_0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 x dx = 0 \\ \|h_1\|^2 &= \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{3}[x^3]_{-1}^1 = \frac{2}{3}, & \tilde{h}_1(x) &= \sqrt{\frac{3}{2}}x \\ \langle h_2, \tilde{h}_0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{3\sqrt{2}}[x^3]_{-1}^1 = \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ \langle h_2, \tilde{h}_1 \rangle &= \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 x^3 dx = 0 \\ \|h_2 - \frac{2}{3\sqrt{2}}\tilde{h}_0\| &= \int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \int_{-1}^1 x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9} dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{9} + \frac{x}{9}\right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{8}{45} \\ \tilde{h}_2(x) &= \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Die Funktionen \tilde{h}_0 , \tilde{h}_1 und \tilde{h}_2 bilden ein Orthonormalsystem. Wir brechen das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren hier ab und zeigen, dass die Funktionen \tilde{h}_n bis auf einen Normalisierungsfaktor die Legendreschen Polynome sind.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist das **Legendresche Polynom** L_n vom Grad n definiert durch

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n).$$

Satz 12. *Die normierten Legendreschen Polynome*

$$\left\{ \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}} L_n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ bezüglich des Skalarproduktes $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass die Legendreschen Polynome orthogonal zueinander sind. Für $n > 0$ gilt

$$\langle L_n, 1 \rangle = \int_{-1}^1 L_n(x) dx = \frac{1}{2^n n!} \left[((x^2 - 1)^n)^{(n-1)} \right]_{-1}^1 = 0,$$

da $x = \pm 1$ Nullstellen von $((x^2 - 1)^n)^{(n-1)}$ sind. Für $n > m > 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle L_m, L_n \rangle &= \int_{-1}^1 L_m(x) L_n(x) dx = \frac{1}{2^{n+m} m! n!} \int_{-1}^1 ((x^2 - 1)^n)^{(n)} ((x^2 - 1)^m)^{(m)} dx \\ &= \frac{1}{2^{n+m} m! n!} \left(\left[((x^2 - 1)^n)^{(n-1)} ((x^2 - 1)^m)^{(m)} \right]_{-1}^1 \right. \\ &\quad \left. - \int_{-1}^1 ((x^2 - 1)^n)^{(n-1)} ((x^2 - 1)^m)^{(m+1)} dx \right) \\ &= - \frac{(-1)^{m+1}}{2^{n+m} m! n!} \int_{-1}^1 ((x^2 - 1)^n)^{(n-m-1)} ((x^2 - 1)^m)^{(2m+1)} dx = 0, \end{aligned}$$

da $x = \pm 1$ Nullstellen von $((x^2 - 1)^n)^{(n-k)}$ sind und $((x^2 - 1)^m)^{(2m+1)} = 0$.

Durch partielle Integration läßt sich auch die Norm $\|L_m\|$ berechnen:

$$\begin{aligned} \|L_m\|^2 &= \frac{1}{2^{2m} (m!)^2} \int_{-1}^1 ((x^2 - 1)^m)^{(m)} ((x^2 - 1)^m)^{(m)} dx \\ &= \frac{1}{2^{2m} (m!)^2} (-1)^m \int_{-1}^1 ((x^2 - 1)^m)^{(2m)} ((x^2 - 1)^m) dx \\ &= \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} (-1)^m \int_{-1}^1 (x-1)^m (x+1)^m dx \\ &= \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} \frac{m!}{(m+1) \dots 2m} \int_{-1}^1 (x-1)^{2m} (x+1)^0 dx \\ &= \frac{1}{2^{2m}} \int_{-1}^1 (x-1)^{2m} dx = \frac{1}{2^{2m}} \frac{1}{2m+1} \left[(x-1)^{2m+1} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{2m+1} \end{aligned}$$

Da das Legendresche Polynom L_n den Grad n hat, liegen alle Monome x^j mit $j \in \mathbb{N}$ im Vektorraum, der von den Legendreschen Polynomen erzeugt wird. Aus dem Weierstraßschen Approximationssatz folgt dann, dass die normierten Legendreschen Polynome ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ bilden. \square

Mit der Leibnizregel für die Ableitung erhalten wir

$$\begin{aligned} L'_{n+1}(x) &= \frac{1}{2^{n+1} (n+1)!} ((x^2 - 1)^{n+1})^{(n+2)} = \frac{1}{2^n n!} ((x^2 - 1)^n x)^{(n+1)} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \left(x ((x^2 - 1)^n)^{(n+1)} + (n+1) ((x^2 - 1)^n)^{(n)} \right) \\ &= x L'_n(x) + (n+1) L_n(x) \end{aligned}$$

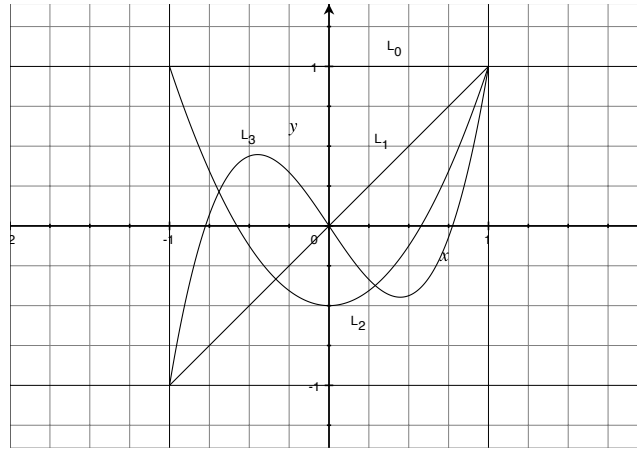


ABBILDUNG 7. Die ersten vier Legendreschen Polynome

und

$$\begin{aligned}
 L'_{n+1}(x) &= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \left(((x^2-1)^n(x^2-1))^{(n+1)} \right)' \\
 &= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \left((x^2-1)((x^2-1)^n)^{(n+1)} + 2x(n+1)((x^2-1)^n)^{(n)} \right. \\
 &\quad \left. + n(n+1)((x^2-1)^n)^{(n-1)} \right)' \\
 &= \frac{x^2-1}{2(n+1)} L''_n(x) + \frac{(n+2)x}{n+1} L'_n(x) + \frac{n+2}{2} L_n(x).
 \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen für $L'_{n+1}(x)$ ergibt sich *Legendresche Differentialgleichung*

$$(7) \quad 0 = (x^2-1)L''_n(x) + 2xL'_n(x) - n(n+1)L_n(x).$$

Ähnlich können wir eine *Rekursionsformel*

$$(8) \quad (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

für die Legendreschen Polynome beweisen:

$$\begin{aligned}
 (n+1)L_{n+1}(x) &= \frac{1}{2^{n+1}n!} ((x^2-1)^{n+1})^{(n+1)} \\
 &= \frac{1}{2^n n!} ((n+1)x(x^2-1)^n)^{(n)} \\
 &= \frac{1}{2^n n!} ((2n+1)x(x^2-1)^n - nx(x^2-1)^n)^{(n)} \\
 &= \frac{1}{2^n n!} \left((2n+1)x((x^2-1)^n)^{(n)} + (2n+1)n((x^2-1)^n)^{(n-1)} \right. \\
 &\quad \left. - n^2((x^2-1)^{n-1}2x^2)^{(n-1)} - n((x^2-1)^n)^{(n-1)} \right) \\
 &= (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)
 \end{aligned}$$

Abbildung 7 zeigt die Graphen der ersten vier Legendreschen Polynome.

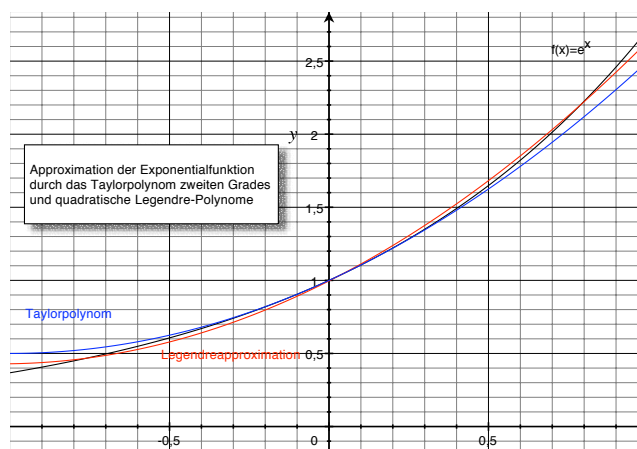


ABBILDUNG 8. Approximation der Exponentialfunktion (schwarz) durch das Taylorpolynom zweiten Grades (blau) und quadratische Legendre-Polynome (rot)

Beispiel 35 (Approximation von e^x durch quadratische Polynome). Die Linearkombination $\sum_{j=0}^2 a_j \tilde{h}_j(x)$ mit $a_j = \langle f, \tilde{h}_j \rangle$ ist die beste Approximation von $f(x) = e^x$ im quadratischen Mittel durch quadratische Polynome. Wir berechnen die Koeffizienten a_0 , a_1 und a_2

$$\begin{aligned} \langle e^x, \tilde{h}_0 \rangle &= \int_{-1}^1 e^x \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} [e^x]_{-1}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e - e^{-1}) \\ \langle e^x, \tilde{h}_1 \rangle &= \int_{-1}^1 e^x \sqrt{\frac{3}{2}} x dx = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 e^x x dx = \sqrt{\frac{3}{2}} \left([e^x x]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x dx \right) \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} (e + e^{-1} - e^x + e^{-1}) = 2\sqrt{\frac{3}{2}} e^{-1} \\ \langle e^x, \tilde{h}_2 \rangle &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \int_{-1}^1 e^x (3x^2 - 1) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \left([-e^x]_{-1}^1 + [e^x 3x^2]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 6xe^x dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \left(-e + e^{-1} + 3e - 3e^{-1} - [6xe^x]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 6e^x dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (2e - 2e^{-1} - 6e - 6e^{-1} + 6e - 6e^{-1}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (2e - 14e^{-1}) \end{aligned}$$

und erhalten die quadratische Approximation

$$\begin{aligned} e^x &\sim \frac{1}{\sqrt{2}} (e - e^{-1}) \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{\frac{3}{2}} e^{-1} \sqrt{\frac{3}{2}} x + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (2e - 14e^{-1}) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (3x^2 - 1) \\ e^x &\sim \frac{1}{2} (e - e^{-1}) + 3e^{-1} x + \frac{5}{8} (2e - 14e^{-1}) (3x^2 - 1) \\ e^x &\sim -\frac{3}{4} e + \frac{33}{4} e^{-1} + 3e^{-1} x + \frac{15}{4} (e - 7e^{-1}) x^2 \end{aligned}$$

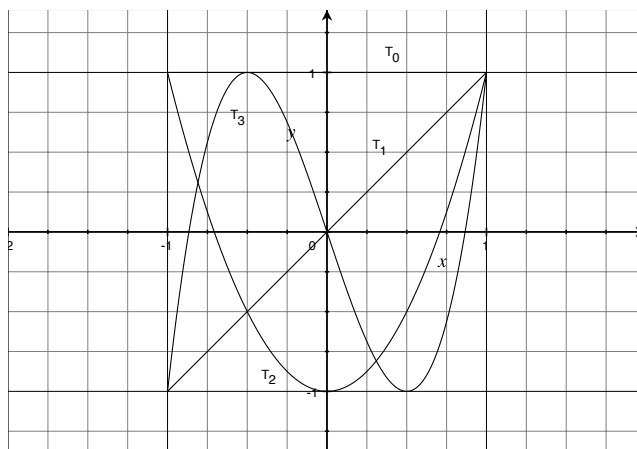


ABBILDUNG 9. Die ersten vier Tschebyscheffschen Polynome

2.6.2. *Tschebyscheffsche Polynome.* Tschebyscheffsche Polynome treten bei Tschebyscheff-Filtern der Elektrotechnik im Nenner der Übertragungsfunktion auf. Wir betrachten den Vektorraum $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Die **Tschebyscheffschen Polynome** $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ sind auf dem Intervall $[-1, 1]$ glatte Funktionen. Sie erfüllen die Orthogonalitätsrelationen $\langle T_n, T_m \rangle = 0$ für alle $n \neq m$, die Differentialgleichung $(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$ und die Rekursionsformel $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, also $T_0(x) \equiv 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$. Abbildung 9 zeigt die ersten vier Tschebyscheffschen Polynome.

3. DIFFERENTIALRECHNUNG MEHRERER VERÄNDERLICHER

Wir betrachten Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$ wobei $m, n \in \mathbb{N}$ und D eine (offene) Teilmenge von \mathbb{R}^n ist. Funktionen, die von mehreren Veränderlichen abhängig sind, sind z.B. die Ladungsverteilung im Raum $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, oder die kinetische Energie, die von der Masse und der Geschwindigkeit abhängt.

Weiterhin muss man manchmal Funktionen mehrerer Veränderlicher betrachten, um Eigenschaften von Funktionen, die nur von einer Variablen abhängig sind, zu beweisen, z.B. die Assoziativität des Faltungsproduktes und die Aussage, dass $\sum_{j=0}^N \langle v, v_j \rangle v_j$ die beste Approximation eines Vektors v bezüglich eines Orthonormalsystems $\{v_j : j = 0, \dots, N\}$ ist.

Abbildungen nach \mathbb{R}^m ($m > 1$) treten zum Beispiel auf, wenn man den Weg eines Teilchens (im \mathbb{R}^3) beschreiben will.

3.1. Eigenschaften des \mathbb{R}^n . Der \mathbb{R}^n ist die Menge aller n -Tupel reeller Zahlen. Wir schreiben einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ als Spaltenvektor $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ mit $x_j \in \mathbb{R}$. Der \mathbb{R}^n ist ein reeller Vektorraum der Dimension n , $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = \dim \mathbb{R}^n = n$. Die Standardbasis besteht aus den Einheitsvektoren \vec{e}_j , so dass $\vec{x} = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j$ mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $x_j \in \mathbb{R}$.

Der Vektorraum \mathbb{R}^n ist mit dem (euklidischen) Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$, wobei $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ und $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$, ausgestattet. Die durch dieses Skalarprodukt definierte Norm ist die euklidische Norm $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Für $\varepsilon > 0$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ist die ε -Umgebung $U_\varepsilon(\vec{x})$ eines Punktes \vec{x} definiert als $U_\varepsilon(\vec{x}) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{y}\| < \varepsilon\}$.

Definition 18. Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **offen**, falls es zu jedem Punkt $\vec{x} \in D$ eine ε -Umgebung $U_\varepsilon(\vec{x})$ gibt, die ganz in D liegt, also $U_\varepsilon(\vec{x}) \subset D$.

Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **abgeschlossen**, falls ihr Komplement $\mathbb{R}^n \setminus D$ eine offene Menge ist.

Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **beschränkt**, falls es ein $S \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\|\vec{x}\| \leq S$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Natürlich sind \mathbb{R}^n , ε -Umgebungen und die leere Menge \emptyset offene Teilmengen des \mathbb{R}^n . Auch unendliche Vereinigungen und endliche Durchschnitte offener Mengen sind wieder offen.

Beispiel 36 (offene Intervalle). Für $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ mit $a_j < b_j$ heißt die Teilmenge $\{\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : a_j < x_j < b_j \forall j\}$ ein offenes Intervall in \mathbb{R}^n . Falls $n = 1$, so handelt es sich um das Intervall (a_1, b_1) . Falls $n = 2$, so ist das Intervall ein offenes Rechteck mit den Seitenlängen $b_1 - a_1$ und $b_2 - a_2$. Falle $n = 3$, so ist das Intervall ein offener Quader mit den Seitenlängen $b_j - a_j$ für $j = 1, 2, 3$.

Beispiel 37 (abgeschlossene Intervalle). Für $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ mit $a_j < b_j$ heißt die Teilmenge $\{\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j \forall j\}$ ein abgeschlossenes Intervall in \mathbb{R}^n .

Satz 13 (Komponentenweise Konvergenz). Eine Folge $\{\vec{x}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in \mathbb{R}^n gegen \vec{x} , wenn die n Koeffizientenfolgen gegen die Koeffizienten von \vec{x} konvergieren.

Beweis. Mit den Bezeichnungen $\vec{x}_m = (x_{m,1}, \dots, x_{m,n})^T = \sum_{j=1}^n x_{m,j} \vec{e}_j$ und $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j$ erhalten wir mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$|x_{m,k} - x_k| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{m,j} - x_j)^2} = \|\vec{x}_m - \vec{x}\| \leq \sum_{j=1}^n \|x_{m,j} \vec{e}_j - x_j \vec{e}_j\| = \sum_{j=1}^n |x_{m,j} - x_j|.$$

□

Folgerung 7. Wenn $\{\vec{x}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, $\{\vec{y}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen in \mathbb{R}^n und $\{\lambda_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in \mathbb{R} mit $\lim_{m \rightarrow \infty} \vec{x}_m = \vec{x}$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \vec{y}_m = \vec{y}$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = \lambda$, dann gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\vec{x}_m + \vec{y}_m) = \vec{x} + \vec{y}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m \vec{x}_m = \lambda \vec{x}$$

und

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle \vec{x}_m, \vec{y}_m \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|\vec{x}_m\| = \|\vec{x}\|.$$

Beweis. Mit $\vec{x} = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j$, $\vec{y} = \sum_{j=1}^n y_j \vec{e}_j$, $\vec{x}_k = \sum_{j=1}^n x_{k,j} \vec{e}_j$, $\vec{y}_k = \sum_{j=1}^n y_{k,j} \vec{e}_j$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k + \vec{y}_k &= \sum_{j=1}^n \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{k,j} + y_{k,j}) \vec{e}_j = \sum_{j=1}^n (x_j + y_j) \vec{e}_j = \vec{x} + \vec{y}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k \vec{x}_k &= \sum_{j=1}^n \lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_k x_{k,j}) \vec{e}_j = \sum_{j=1}^n (\lambda x_j) \vec{e}_j = \lambda \vec{x}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \vec{x}_k, \vec{y}_k \rangle &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_{k,j} y_{k,j} = \sum_{j=1}^n \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,j} y_{k,j} = \sum_{j=1}^n x_j y_j = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{x}_k\|^2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \vec{x}_k, \vec{x}_k \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \|\vec{x}\|^2. \end{aligned}$$

□

Folgerung 8. Jede Folge in \mathbb{R}^n hat höchstens einen Grenzwert. Jede beschränkte Folge in \mathbb{R}^n hat eine konvergente Teilfolge. Jede Cauchyfolge in \mathbb{R}^n ist konvergent in \mathbb{R}^n .

Beweis. Direkt aus den entsprechenden Resultaten für Folgen reeller Zahlen durch Übergang zu den Koordinatenfolgen. □

3.2. Beispiele und Darstellungshilfen. Um Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besser zu verstehen, haben wir ihre Graphen $\{(x, y) \in \mathbb{R} : y = f(x)\}$ skizziert. Auch für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kann man den Graph definieren und betrachten $\{(x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = f(x_1, \dots, x_n)\}$. Aber dieser Graph ist (für $n > 1$) keine Teilmenge des \mathbb{R}^2 mehr und lässt sich deshalb schlecht skizzieren.

3.2.1. Kurven. Kurven sind Abbildungen $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))^T$. Statt des Graphen kann man sich das Bild der Kurve c anschauen, also die Menge $\{c(t) : t \in [a, b]\}$. Man nennt diese Bildmenge auch **Spur** der Kurve. Dies ist besonders hilfreich, wenn die Abbildung c injektiv ist und $n = 2, 3$. Kurven sind wichtig, um eindimensionale Unterobjekte zu beschreiben, z.B. den Weg eines Teilchens in Abhängigkeit von der Zeit t .

Beispiel 38 (Geraden und Strecken). Die Spur der Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) = (a_1 t, a_2 t)$, mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ist eine Gerade in \mathbb{R}^2 . Schränkt man den Definitionsbereich auf ein Intervall ein, so parametrisiert man Strecken. Besonders häufig braucht man eine Parametrisierung einer Geraden in der Nähe eines Punktes $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$. Sie ist durch $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) = (x_1 + a_1 t, x_2 + a_2 t)$, mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben.

Beispiel 39 (Kreis). Die Spur der Kurve $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) = (\cos t, \sin t)^T$, ist der Kreis mit Mittelpunkt $\vec{0}$ und Radius 1.

Beispiel 40 (Schraubelinie). Für $h \in \mathbb{R}$ fest betrachten wir die Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $c(t) = (\cos t, \sin t, th)^T$.

Wir werden später, nach den notwendigen Definitionen, sehen, dass eine Kurve c genau dann stetig bzw. differenzierbar ist, wenn dies für alle ihre Komponentenfunktionen c_j der Fall ist.

3.2.2. Koordinatenlinien. Zu einer gegebenen Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten wir die **partiellen Funktionen** entlang einer Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, d.h. die Funktion $f \circ c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(c(t))$. Zum Beispiel beschreibt $f \circ c_j$ mit $c_j(t) = \vec{x} + t\vec{e}_j$ wie sich die Funktion f um den Punkt \vec{x} in Richtung \vec{e}_j , also in Richtung der x_j -Koordinate verändert. Gerade bei rotationssymmetrischen Funktionen ist es sinnvoll, die Kurven $c_\phi : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c_\phi(t) = t(\cos \phi, \sin \phi)$, und die Funktionen $f \circ c_\phi$ zu betrachten.

Beispiel 41 (Nordhalbkugel). Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ und $D = \{(x_1, x_2)^T : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$. Der Graph ist die Oberfläche der oberen Halbkugel.

Für $\vec{x} = (0, a_2)^T$ erhält man die partielle Funktion $f \circ c_1(t) = f(t, a_2) = \sqrt{1 - a_2^2 - t^2}$ für $|t| \leq \sqrt{1 - a_2^2}$ deren Graph ein Halbkreis um $(0, a_2)$ mit Radius $\sqrt{1 - a_2^2}$ ist. Für jeden Winkel ϕ ist $f \circ c_\phi(t) = \sqrt{1 - t^2}$ für $|t| \leq 1$ definiert. Der Graph von $f \circ c_\phi$ ist ein Halbkreis um den Koordinatenursprung.

Die Abbildung 10 zeigt den Graph der Abbildung f mit (r, ϕ) - und (x, y) -Koordinatenlinien.

Beispiel 42 (Sattelfläche). Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Für $\vec{x} = (a_1, a_2)^T$ erhält man die partielle Funktion $f \circ c_1(t) = f(a_1 + t, a_2) = a_1 a_2 + t a_2$, also eine lineare Funktion in t , deren Graph eine Gerade ist.

3.2.3. Höhenlinien. Zu einer gegebenen Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten wir die **Höhenlinien**, d.h. die Menge $H_c = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : f(\vec{x}) = c\}$ mit $c \in \mathbb{R}$. Die Gestalt und die Veränderung dieser Höhenlinien, wenn man c variiert, gibt uns einen Eindruck vom Verhalten der Funktion f .

Beispiel 43 (Nordhalbkugel). Für $f : \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ und $D = \{(x_1, x_2)^T : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ wie in Beispiel 41 gilt $H_c = \{(x_1, x_2)^T : x_1^2 + x_2^2 = 1 - c^2\}$. Also ist die Höhenlinie H_c für $c > 0$ ein Kreis mit Radius $\sqrt{1 - c^2}$, für $c = 1$ ein Punkt und für $c < 0$ leer. In der Abbildung 11 sieht man links den Graph der Funktion f entlang der Höhenlinien.

Beispiel 44 (Sattelfläche). Für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ wie in Beispiel 42 gilt $H_c = \{(x_1, x_2)^T : x_1 x_2 = c\}$. Also ist die Höhenlinie H_c eine

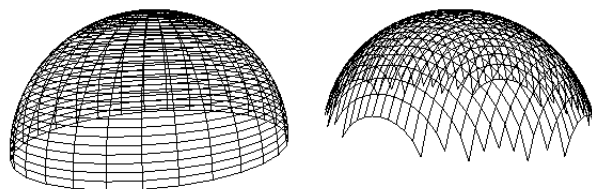


ABBILDUNG 10. Graph von $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ mit (r, ϕ) - und (x, y) -Koordinatenlinien

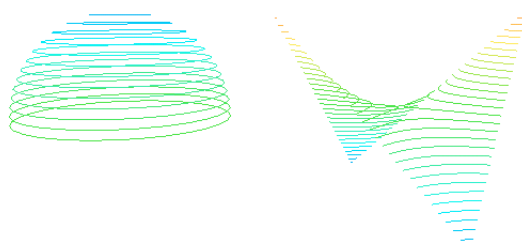


ABBILDUNG 11. Höhenlinien der Nordhalbkugel und der Sattelfläche

Hyperbel $\{(x_1, c/x_1)^T : x_1 \neq 0\}$ für $c \neq 0$ und die Vereinigung der beiden Geraden $\{x_1 = 0\}$ und $\{x_2 = 0\}$ für $c = 0$. In der Abbildung 11 sieht man rechts den Graph der Funktion f entlang der Höhenlinien.

3.3. Stetigkeit.

Definition 19. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **stetig in einem Punkt** $\vec{x} \in D$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(\vec{y}) - f(\vec{x})| < \varepsilon$ für alle \vec{y} mit $\|\vec{y} - \vec{x}\| < \delta$.

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **stetig** in $\vec{x} \in D$, falls f in jedem Punkt $\vec{x} \in D$ stetig ist.

Beispiel 45 (Stetigkeit der Koordinatenfunktionen). Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \mapsto x_j$, ist stetig in jedem Punkt \vec{x} für jedes $j = 1, \dots, n$, denn zu jedem $\varepsilon > 0$ gilt für alle $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ mit $\|\vec{y} - \vec{x}\| < \varepsilon (= \delta)$

$$\begin{aligned} |f(\vec{y}) - f(\vec{x})| &= |y_j - x_j| = \sqrt{(y_j - x_j)^2} \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \|\vec{y} - \vec{x}\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Lemma 9 (Äquivalenz von Stetigkeit und Folgenstetigkeit). *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $\vec{x} \in D$, wenn für jede Folge $\{\vec{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \vec{x}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n) = f(\vec{x})$.*

Beweis. Wenn f stetig in \vec{x} ist und $\{\vec{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ eine gegen \vec{x} konvergente Folge ist, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|f(\vec{x}_n) - f(\vec{x})| < \varepsilon$ für alle \vec{x}_n mit $\|\vec{x}_n - \vec{x}\| < \delta$. Da die Folge $\{\vec{x}_n\}$ aber konvergent ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\|\vec{x}_n - \vec{x}\| < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Also $|f(\vec{x}_n) - f(\vec{x})| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und die Folge $\{f(\vec{x}_n)\}$ konvergiert gegen $f(\vec{x})$.

Wenn f in \vec{x} nicht stetig ist, dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $\delta_n = 1/n > 0$ ein \vec{x}_n mit $\|\vec{x}_n - \vec{x}\| < 1/n$ und $|f(\vec{x}_n) - f(\vec{x})| \geq \varepsilon_0$ existiert. Die so gefundene Folge $\{\vec{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ konvergiert gegen \vec{x} aber die Folge der Funktionswerte $\{f(\vec{x}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $f(\vec{x})$, denn $|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_n)| \geq \varepsilon_0$ □

Lemma 10. *Wenn $f, g : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind, so sind auch ihre Summe $f + g : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ und ihr Produkt $fg : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wenn zusätzlich $g(\vec{x}) \neq 0$, so ist auch der Quotient f/g stetig in $\vec{x} \in D$.*

Wenn $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \subset U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f(D) \subset U$, dann ist auch $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x}))$ stetig.

Beweis. Der Beweis verläuft wie im Fall von Funktionen einer Veränderlicher und basiert auf den Rechenregeln zur Grenzwertbildung. Wenn f und g stetig in \vec{x} , dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n) = f(\vec{x})$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\vec{x}_n) = g(\vec{x})$ für jede gegen \vec{x} konvergente Folge $\{\vec{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D$. Also auch

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (f + g)(\vec{x}_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n) + g(\vec{x}_n) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) = (f + g)(\vec{x}) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (fg)(\vec{x}_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n)g(\vec{x}_n) = f(\vec{x})g(\vec{x}) = (fg)(\vec{x}) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (f/g)(\vec{x}_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n)/g(\vec{x}_n) = f(\vec{x})/g(\vec{x}) = (f/g)(\vec{x}) \end{aligned}$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (g \circ f)(\vec{x}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(\vec{x}_n)) = g(f(\vec{x})) = (g \circ f)(\vec{x}).$$

□

Beispiel 46 (Polynome). Polynome in den Koordinatenfunktionen x_1, \dots, x_n sind stetige Funktionen auf \mathbb{R}^n , da sie durch die Operationen Addition und Multiplikation aus den Koordinatenfunktionen in Beispiel 45 entstehen.

Beispiel 47. Die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x_1, x_2) = x_1 \sin x_2$ ist stetig, denn h ist das Produkt der stetigen Koordinatenfunktion $(x_1, x_2)^T \mapsto x_1$ und der stetigen Funktion $h(x_1, x_2) = \sin x_2$. Dabei ist die Funktion h stetig, weil $h = \sin \circ g_1$ mit $g_1(x_1, x_2) = x_1$.

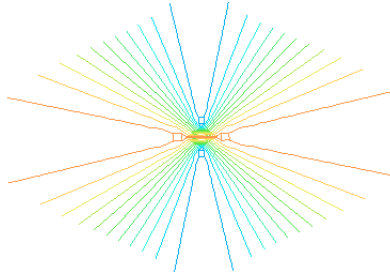


ABBILDUNG 12. Höhenlinien der Funktion $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$

Beispiel 48 (Unstetige aber partiell stetige Funktion). Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , \text{ falls } (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ 0 & , \text{ falls } (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases}.$$

Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\}$ stetig, weil sie dort Quotient zweier Polynome ist. Die Funktion ist in $\vec{x} = (0, 0)^T = \vec{0}$ nicht stetig, da für die Folge $\{\vec{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\vec{x}_n = (1/n, 1/n)^T$ zwar $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \vec{0}$ aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n^2}{1/n^2 + 1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(\vec{0}).$$

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich auch nicht stetig auf \mathbb{R}^2 fortsetzen, z.B. durch die Definition $f(\vec{0}) = 1/2$, da es auch gegen $\vec{0}$ konvergierende Folgen gibt, für die die Folge der Funktionswerte nicht gegen $1/2$ konvergiert, z.B. die Folge $\{\vec{y}_n = (0, 1/n)^T\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{y}_n) = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{y}_n = \vec{0}$. Abbildung 12 zeigt die Höhenlinien der Funktion f . Man erkennt, dass sich alle Höhenlinien in $\vec{0}$ „treffen“.

Warnung: Um die Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $n > 1$ zu beweisen, reicht es nicht, die Stetigkeit der partiellen Funktionen $f \circ c_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ c_j)(t) = f(\vec{x} + t\vec{e}_j)$, für alle \vec{x} und j zu zeigen.

3.4. Differenzierbarkeit. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hieß differenzierbar in einem Punkt x_0 , wenn sie durch eine lineare Funktion $l(x) = c(x - x_0)$ in der Nähe des Punktes x_0 gut angenähert wurde. Dabei bedeutete „gut“, dass der Fehler $f(x) - f(x_0) - c(x - x_0)$ schneller gegen 0 konvergiert als der Abstand $|x - x_0|$, also

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - c = 0.$$

Diese Zahl c hängt vom Punkt x_0 ab und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ soll differenzierbar in \vec{x}_0 heißen, wenn sie sich lokal, d.h. in der Nähe von \vec{x}_0 , „gut“ durch eine lineare Funktion approximieren läßt. Eine lineare Funktion $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $l(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_0)$ ist von Form

$$l(\vec{x}) = c_1(x_1 - x_{0,1}) + \dots + c_n(x_n - x_{0,n}) = \langle c, \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle$$

mit $c = \sum_{j=1}^n c_j \vec{e}_j$, $\vec{x} = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j$, $\vec{x}_0 = \sum_{j=1}^n x_{0,j} \vec{e}_j$ und Konstanten $c_j \in \mathbb{R}$.

3.4.1. *Totale Differenzierbarkeit.*

Definition 20. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar in einem Punkt** \vec{x}_0 , falls es einen Vektor $c = \sum_{j=1}^n c_j \vec{e}_j$ gibt, so dass

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \langle c, \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0.$$

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar** in $D \subset \mathbb{R}^n$, wenn sie in jedem Punkt $\vec{x}_0 \in D$ differenzierbar ist.

Die Differenz $f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \langle c, \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle$ ist eine Funktion $r(\vec{x} - \vec{x}_0)$. Falls f in \vec{x}_0 differenzierbar ist, so kann man $r(\vec{x} - \vec{x}_0)/\|\vec{x} - \vec{x}_0\|$ stetig in $\vec{0}$ fortsetzen.

Satz 14 (Stetigkeit). Wenn $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in \vec{x}_0 , so ist f auch stetig in \vec{x}_0 .

Beweis. Aus der Dreiecksungleichung und der Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} |f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| &= |\langle c, \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle + r(\vec{x} - \vec{x}_0)| \leq |\langle c, \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle| + |r(\vec{x} - \vec{x}_0)| \\ &\leq \|c\| \|\vec{x} - \vec{x}_0\| + \left| \frac{r(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} \right| \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \end{aligned}$$

und damit die Stetigkeit, da $r(\vec{x} - \vec{x}_0)/\|\vec{x} - \vec{x}_0\|$ stetig in $\vec{0}$ ist. □

3.4.2. *Partielle Differenzierbarkeit.*

Satz 15 (Partielle Ableitungen). Wenn $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in \vec{x}_0 differenzierbar ist, dann gilt $c_j = h'_j(0)$ für alle j , wobei $h_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h_j(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{e}_j)$.

Beweis. In der Definition der Differenzierbarkeit betrachten wir $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{e}_j$ mit $t \rightarrow 0$, also $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$. Wenn f differenzierbar ist, so gilt $\vec{x} - \vec{x}_0 = t\vec{e}_j$ und es gibt eine Funktion $r(t)$ mit $\lim_{t \rightarrow 0} r(t)/t = 0$ und

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_0 + t\vec{e}_j) - f(\vec{x}_0) &= \langle c, t\vec{e}_j \rangle + r(t) \\ h_j(t) - h_j(0) &= tc_j + r(t) \\ \frac{h_j(t) - h_j(0)}{t} &= c_j + \frac{r(t)}{t} \\ h'_j(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_j(t) - h_j(0)}{t} &= c_j + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t)}{t} = c_j. \end{aligned}$$

□

Definition 21. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **partiell differenzierbar in** \vec{x}_0 , falls die partiellen Funktionen $h_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h_j(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{e}_j)$ für $t = 0$ differenzierbar sind. Wir benutzen die Bezeichnungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0) := h'_j(0), \quad (\text{grad } f)_{\vec{x}_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \right)^T.$$

Der Vektor $(\text{grad } f)_{\vec{x}_0}$ der partiellen Ableitungen $(\partial f / \partial x_j)(\vec{x}_0)$ heißt **Gradient von f in \vec{x}_0** . Falls f für alle $\vec{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar ist, so nennt man auch die Funktionen

$$f_{x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_{x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}),$$

partielle Ableitungen von f .

Wählt man in \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 die Koordinatenfunktionen x, y, z , so schreibt man auch f_x, f_y und f_z für die entsprechenden partiellen Ableitungen.

Beispiel 49. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + \sin(x + 2y)$. Sie ist partiell differenzierbar, weil ihre partiellen Funktionen differenzierbar sind. Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir $f_x(x, y) = 2x + \cos(x + 2y)$ und $f_y(x, y) = 2 \cos(x + 2y)$, also

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} 2x + \cos(x + 2y) \\ 2 \cos(x + 2y) \end{pmatrix}, \quad (\text{grad } f)_{(2, -1)^T} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Satz 16 (Hinreichendes Kriterium für Differenzierbarkeit). *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ ist in $\vec{x}_0 \in D$ differenzierbar, wenn es eine offene Umgebung $U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset D$ gibt, auf der alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind.*

Beweis. Für $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v} \in U_\varepsilon(\vec{x}_0)$ betrachten wir die Differenz $\vec{x} - \vec{x}_0 = \vec{v} = \sum_{j=1}^n v_j \vec{e}_j$ und führen die Zwischenpunkte $\vec{x}_k = \vec{x}_0 + \sum_{j=1}^k v_j \vec{e}_j$ ein. Nun gilt mit Hilfe des Mittelwertsatzes für $0 \leq t_j \leq 1$

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \langle (\text{grad } f)_{\vec{x}_0}, \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle &= \sum_{k=1}^n (f(\vec{x}_k) - f(\vec{x}_{k-1})) - \sum_{k=1}^n f_{x_k}(\vec{x}_0) v_k \\ &= \sum_{k=1}^n v_k f_{x_k}(\vec{x}_{k-1} + t_k v_k \vec{e}_k) - \sum_{k=1}^n f_{x_k}(\vec{x}_0) v_k \\ &= \sum_{k=1}^n (f_{x_k}(\vec{x}_{k-1} + t_k v_k \vec{e}_k) - f_{x_k}(\vec{x}_0)) v_k. \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit der partiellen Funktionen in $U_\varepsilon(\vec{x}_0)$ und $\lim_{\vec{v} \rightarrow \vec{0}} |v_k| / \|\vec{v}\| = 0$, da $|v_k| \leq \|\vec{v}\|$ folgt die Differenzierbarkeit von f in \vec{x}_0 . \square

Beispiel 50. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + \sin(x + 2y)$, aus Beispiel 49 ist differenzierbar, da f_x und f_y überall stetig sind.

3.4.3. Richtungsableitung.

Lemma 11 (Richtungsableitung). *Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in \vec{x}_0 differenzierbar und $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ein normierter Vektor, d.h. $\|\vec{a}\| = 1$. Dann gilt $\langle (\text{grad } f)_{\vec{x}_0}, \vec{a} \rangle = h'(0)$ für die Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{a})$.*

Beweis. Der Beweis ähnelt dem Beweis des Satzes 15. In der Definition der Differenzierbarkeit setzen wir $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a}$ und erhalten, wegen $\|\vec{a}\| = 1$,

$$\frac{r(t)}{t\|\vec{a}\|} = \frac{1}{t} (f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \langle (\text{grad } f)_{\vec{x}_0}, \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle) = \frac{h(t) - h(0)}{t} - \langle (\text{grad } f)_{\vec{x}_0}, \vec{a} \rangle.$$

Für $t \rightarrow 0$ und erhalten $h'(0) = \langle (\text{grad } f)_{\vec{x}_0}, \vec{a} \rangle$, da $\lim_{t \rightarrow 0} r(t)/|t| = 0$. \square

Definition 22. Es seien $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $\|\vec{a}\| = 1$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und \vec{x}_0 ein Punkt. Falls die partielle Funktion $t \mapsto f(\vec{x}_0 + t\vec{a})$ in $t = 0$ differenzierbar ist, so nennt man

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(\vec{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{a}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

die **Richtungsableitung** von f in Richtung \vec{a} im Punkt \vec{x}_0 .

Satz 17 (Geometrische Deutung des Gradienten). Der Gradient einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt \vec{x} zeigt in die Richtung des größten Anstiegs und steht senkrecht auf der Höhenlinie durch \vec{x} .

Beweis. Für jeden Richtungsvektor \vec{a} (mit $\|\vec{a}\| = 1$) gilt für den Winkel α zwischen $(\text{grad } f)_{\vec{x}}$ und \vec{a}

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(\vec{x}) = \langle (\text{grad } f)_{\vec{x}}, \vec{a} \rangle = \|(\text{grad } f)_{\vec{x}}\| \|\vec{a}\| \cos \alpha \leq \|(\text{grad } f)_{\vec{x}}\|,$$

wobei das Maximum genau für $\alpha = 0$ angenommen wird.

Wenn $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $c(0) = \vec{x}$ und $(f \circ c)(t) = f(c(t)) = f(\vec{x})$ für alle t , dann gilt

$$0 = (f \circ c)'(0) = \sum_{j=1}^n f_{x_j}(c(0))c'_j(0) = \langle (\text{grad } f)_{\vec{x}}, c'(0) \rangle.$$

□

3.4.4. Beispiele.

Beispiel 51 (partielle Differenzierbarkeit ohne Stetigkeit). Wir betrachten die Funktion $f; \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , \text{ falls } (x, y)^T \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y)^T = (0, 0) \end{cases}.$$

Aus Beispiel 48 wissen wir, dass f partiell stetig aber unstetig in $\vec{0}$ ist. Die Funktion f ist in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ differenzierbar, da dort die partiellen Ableitungen existieren und als Quotienten von Polynomen mit Nennern ohne Nullstellen auch stetig sind. Wir berechnen die partiellen Ableitungen in $\vec{0}$ existieren und $f_x(\vec{0}) = f_y(\vec{0}) = 0$, da $f(0, y) = f(x, 0) = 0$.

Beispiel 52 (partielle Differenzierbarkeit ohne totale Differenzierbarkeit). Wir betrachten die Funktion $f; \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & , \text{ falls } (x, y)^T \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y)^T = (0, 0) \end{cases}$$

und untersuchen f auf Differenzierbarkeit. Es gilt $f_x(\vec{0}) = 1$ und $f_y(\vec{0}) = 0$, da $f(x, 0) = x$ und $f(0, y) = 0$. Für $\vec{x} \neq \vec{0}$ gilt

$$f_x(\vec{x}) = \frac{3x^2(x^2 + y^2) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y(\vec{x}) = -\frac{2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Die partiellen Ableitungen sind in $\vec{0}$ nicht stetig. Die Funktion f ist auch nicht differenzierbar in $\vec{0}$, denn

$$f(\vec{x}) - f(\vec{0}) - \langle (\text{grad } f)_{\vec{0}}, \vec{x} \rangle = \frac{x^3}{x^2 + y^2} - x = -\frac{xy^2}{x^2 + y^2} = r(x, y)$$

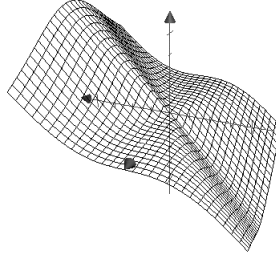


ABBILDUNG 13. Graph von $f(x, y) = x^3/(x^2 + y^2)$

und $r(x, x)/\sqrt{2x^2} = -1/\sqrt{2}$, also $\lim_{x \rightarrow 0} r(x, x)/\|(x, x)^T\| \neq 0$.

Abbildung 13 zeigt den Graphen der Funktion f . Man erkennt, dass in $\vec{0}$ keine Tangentialebene existiert.

Beispiel 53 (partielle Differenzierbarkeit und totale Differenzierbarkeit). Wir betrachten die Funktion $f; \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2+y^2} & , \text{ falls } (x, y)^T \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y)^T = (0, 0) \end{cases}$$

und untersuchen f auf Differenzierbarkeit. Es gilt $f_x(\vec{0}) = 0$ und $f_y(\vec{0}) = 0$, da $f(x, 0) = x^2$ und $f(0, y) = 0$. Für $\vec{x} \neq \vec{0}$ gilt

$$f_x(\vec{x}) = \frac{4x^3(x^2 + y^2) - x^4 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^5 + 4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y(\vec{x}) = -\frac{2x^4y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Die partiellen Ableitungen sind in $\vec{0}$ stetig, denn

$$|f_x(\vec{x})| = |x| \frac{2x^2(x^2 + 2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \leq 2|x|, \quad |f_y(\vec{x})| = |y| \frac{2x^4}{(x^2 + y^2)^2} \leq 2|y|.$$

Also sind die partiellen Ableitungen in einer Umgebung von $\vec{0}$ stetig und die Funktion f ist differenzierbar in $\vec{0}$. Man kann dies auch an der Definition direkt überprüfen

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{0}) - \langle (\text{grad } f)_{\vec{0}}, \vec{x} \rangle| = \frac{x^4}{x^2 + y^2} \leq \|\vec{x}\|^2,$$

also $|r(\vec{x})|/\|\vec{x}\| \leq \|\vec{x}\|$. Abbildung 14 zeigt den Graphen der Funktion f .

3.4.5. Ableitung von parameterabhängigen Integralen. Wir betrachten eine Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die durch bestimmte Integration einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supset [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ nach der zweiten Variablen gegeben ist, $F(x) := \int_c^d f(x, y) dy$.

Satz 18. *Wenn f stetig auf dem Intervall $I = [a, b] \times [c, d]$ ist, so ist auch F stetig auf $[a, b]$. Wenn zusätzlich die partielle Ableitung f_x auf I existiert und stetig ist, so ist auch F auf $[a, b]$ differenzierbar und*

$$F'(x) = \int_c^d f_x(x, y) dy.$$

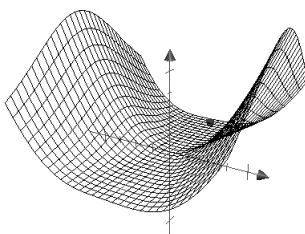


ABBILDUNG 14. Graph von $f(x, y) = x^4 / (x^2 + y^2)$

Beweis. Wenn f auf I stetig ist, so ist f auf I gleichmäßig stetig, da I ein kompaktes Intervall ist. Also existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|f(x+h, y) - f(x, y)| < \varepsilon$ für alle $|h| < \delta$ und alle $(x, y) \in I$. Nun folgt für $|h| < \delta$

$$\begin{aligned} |F(x+h) - F(x)| &= \left| \int_c^d f(x+h, y) - f(x, y) dy \right| \leq \int_c^d |f(x+h, y) - f(x, y)| dy \\ &\leq \max_{y \in [c, d]} |f(x+h, y) - f(x, y)| (d-c) < \varepsilon (d-c) \end{aligned}$$

und damit die Stetigkeit von F .

Wenn f_x auf I existiert und stetig ist, wenden wir den Mittelwertsatz an und erhalten

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \int_c^d \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} dy = \int_c^d f_x(x+th, y) dy$$

für ein $t \in [0, 1]$. Aus der Stetigkeit der partiellen Ableitung folgt

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \int_c^d f_x(x, y) dy.$$

□

Nun betrachten wir eine Funktion $f : I = [a, b] \times [c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ und die Funktion $F(x) := \int_c^\infty f(x, y) dy$, die durch ein uneigentliches Integral definiert wird.

Folgerung 9. Wenn f stetig auf I und das Integral $\int_c^\infty f(x, y) dy$ gleichmäßig auf $[a, b]$ konvergiert, dann gilt für jedes $x_0 \in [a, b]$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \int_c^\infty f(x_0, y) dy.$$

Wenn zusätzlich f_x in I existiert und stetig ist und wenn

$$\int_c^\infty f_x(x, y) dy = \lim_{d \rightarrow \infty} \int_c^d f_x(x, y) dy$$

gleichmäßig auf $[a, b]$ konvergiert, dann gilt $F'(x) = \int_c^\infty f_x(x, y) dy$.

Beispiel 54 (Integraldarstellung der Ableitung). Wir betrachten die stetig differenzierbare Funktion $f(x, y) = \sin(x - y)$ und $F(x) = \int_0^1 \sin(x - y) dy$. Also gilt $F'(x) = \int_0^1 \cos(x - y) dy$. Ohne den Satz müssten wir

$$F(x) = \int_0^1 \sin(x - y) dy = [\cos(x - y)]_0^1 = \cos(x - 1) - \cos(x),$$

$F'(x) = -\sin(x - 1) - \sin x$ berechnen.

Beispiel 55 (Ableitung eines uneigentlichen Integrals, geschlossener Ausdruck für das Integral). Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = e^{-y^2} \cos(xy)$ auf $[a, b] \times [0, \infty)$ und die Funktion $F(x) = \int_0^\infty f(x, y) dy$.

Da $|f(x, y)| \leq e^{-y^2}$ für alle x und das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{-y^2} dy$ existiert, konvergiert auch $F(x)$ gleichmäßig. Weiterhin ist $f_x(x, y) = -ye^{-y^2} \sin(xy)$ stetig, $|f_x(x, y)| \leq ye^{-y^2}$ für alle x und alle $y \in [0, \infty)$ und $\int_0^\infty ye^{-y^2} dy = [-e^{-y^2}/2]_0^\infty = 1/2$ existiert. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^\infty -ye^{-y^2} \sin(xy) dy \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{-y^2} \sin(xy) \right]_0^\infty - \frac{1}{2} \int_0^\infty xe^{-y^2} \cos(xy) dy \\ F'(x) &= -\frac{x}{2} F(x) \\ \frac{F'(x)}{F(x)} &= -\frac{x}{2} \\ \int \frac{F'(x)}{F(x)} dx &= -\int \frac{x}{2} dx \\ \ln |F(x)| &= -\frac{x^2}{4} + c_1 \\ F(x) &= e^{-x^2/4} c. \end{aligned}$$

Wir berechnen die Konstante c als $c = F(0) = \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}/2$. Also gilt

$$F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}.$$

3.5. Partielle Ableitungen höherer Ordnung. Wir betrachten eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$. Ist f in D partiell differenzierbar, so sind die partiellen Ableitungen $f_{x_1}, \dots, f_{x_n} : D \rightarrow \mathbb{R}$ wieder auf D definierte Funktionen. Sind diese Funktionen f_{x_j} wieder in D partiell differenzierbar, so können wir die partiellen Ableitungen $(f_{x_j})_{x_k}$ bilden, die wir auch mit $f_{x_j x_k}$ bezeichnen.

Definition 23. Es sei $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, D eine offene Menge und $\vec{x}_0 \in D$. Existiert für Indizes $i_1, \dots, i_l \in \{1, \dots, n\}$ der Grenzwert

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_l}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{l-1}}} \left(\dots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f \right) \right) (\vec{x}_0),$$

so heißt er **l -te partielle Ableitung von f in \vec{x}_0 nach x_{i_1}, \dots, x_{i_l}** . Sie wird auch mit

$$f_{x_{i_1} \dots x_{i_l}}(\vec{x}_0), \text{ bzw. } \frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_l}}(\vec{x}_0)$$

bezeichnet.

Existieren für f in D alle partiellen Ableitungen l -ter Ordnung und sind diese stetig in D , so heißt f **l -mal stetig partiell differenzierbar**. Die Menge aller l -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf D wird mit $\mathcal{C}^l(D)$ bezeichnet.

Beispiel 56 (Polynome). Wir betrachten $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = 3xyz - 2x^2 + y$. Es gilt $f_x = 3yz - 4x$, $f_y = 3xz + 1$, $f_z = 3xy$, $f_{xy} = f_{yx} = 3z$, $f_{xz} = f_{zx} = 3y$, $f_{yz} = f_{zy} = 3x$, $f_{xx} = -4$, $f_{yy} = 0$. Alle andere partiellen Ableitungen, insbesondere die partiellen Ableitungen der Ordnung > 3 verschwinden. Es gilt $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$, d.h. f ist unendlich oft stetig partiell differenzierbar und die Reihenfolge der partiellen Ableitungen spielt keine Rolle.

Satz 19 (Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen). *Wenn $f \in \mathcal{C}^l(D)$ und $k \leq l$, dann ist jede k -te partielle Ableitung unabhängig von der Reihenfolge, d.h.*

$$f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}} = f_{x_{i_{\sigma(1)}} \dots x_{i_{\sigma(k)}}}$$

für jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_k$.

Beweis. Die Aussage folgt mit vollständiger Induktion aus $f_{xy} = f_{yx}$ für $f \in \mathcal{C}^2(D)$ mit $D \subset \mathbb{R}^2$. Wir beweisen $f_{xy}(\vec{x}_0) = f_{yx}(\vec{x}_0)$ für alle $\vec{x}_0 \in D$ durch Anwendung des Mittelwertsatzes. Es gilt für $\vec{x} = \vec{x}_0 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) &= f(\vec{x}_0 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) - f(\vec{x}_0 + a_2 \vec{e}_2) + f(\vec{x}_0 + a_2 \vec{e}_2) - f(\vec{x}_0) \\ &= a_1 f_x(\vec{x}_0 + \delta_1 a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) + a_2 f_y(\vec{x}_0 + \xi_2 a_2 \vec{e}_2) \\ &= a_1 f_x(\vec{x}_0 + \delta_1 a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) - a_1 f_x(\vec{x}_0 + \delta_1 a_1 \vec{e}_1) \\ &\quad + a_1 f_x(\vec{x}_0 + \delta_1 a_1 \vec{e}_1) + a_2 f_y(\vec{x}_0 + \xi_2 a_2 \vec{e}_2) \\ &= a_2 a_1 f_{xy}(\vec{x}_0 + \delta_1 a_1 \vec{e}_1 + \delta_2 a_2 \vec{e}_2) \\ &\quad + a_1 f_x(\vec{x}_0 + \delta_1 a_1 \vec{e}_1) + a_2 f_y(\vec{x}_0 + \xi_2 a_2 \vec{e}_2) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) &= f(\vec{x}_0 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) - f(\vec{x}_0 + a_1 \vec{e}_1) + f(\vec{x}_0 + a_1 \vec{e}_1) - f(\vec{x}_0) \\ &= a_2 f_y(\vec{x}_0 + a_1 \vec{e}_1 + \delta'_2 a_2 \vec{e}_2) + a_1 f_x(\vec{x}_0 + \xi_1 a_1 \vec{e}_1) \\ &= a_2 f_y(\vec{x}_0 + a_1 \vec{e}_1 + \delta'_2 a_2 \vec{e}_2) - a_2 f_y(\vec{x}_0 + \delta'_2 a_2 \vec{e}_2) \\ &\quad + a_2 f_y(\vec{x}_0 + \delta'_2 a_2 \vec{e}_2) + a_1 f_x(\vec{x}_0 + \xi_1 a_1 \vec{e}_1) \\ &= a_1 a_2 f_{yx}(\vec{x}_0 + \delta'_1 a_1 \vec{e}_1 + \delta'_2 a_2 \vec{e}_2) \\ &\quad + a_2 f_y(\vec{x}_0 + \delta'_2 a_2 \vec{e}_2) + a_1 f_x(\vec{x}_0 + \xi_1 a_1 \vec{e}_1) \end{aligned}$$

für $\delta_1, \delta_2, \delta'_1, \delta'_2, \xi_1, \xi_2 \in [0, 1]$. Für $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$ erhalten wir, $f_{xy}(\vec{x}_0) = f_{yx}(\vec{x}_0)$, da f , f_x und f_y stetig sind. \square

Beispiel 57 (Keine Vertauschbarkeit partieller Ableitungen). Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Es gilt $f_x(\vec{0}) = f_y(\vec{0}) = 0$, da $f(x, 0) = f(0, y) = 0$. Für $(x, y) \neq (0, 0)$ berechnen wir

$$f_x(x, y) = \frac{y(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - 2x^2 y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$$

und

$$f_x(x, y) = -\frac{y^4x + 4y^2x^3 - x^5}{(x^2 + y)^2}.$$

Dann gilt $f_{xy}(\vec{0}) = -1$, da $f_x(0, y) = -y$, und $f_{yx}(\vec{0}) = 1$, da $f_y(x, 0) = x$.

Für die l -te partielle Ableitung $f_{x_i \dots x_i}$ schreibt man auch

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_i^l}.$$

3.6. Funktionen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m und Kettenregel. Es sei $\vec{f}: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion mit

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

und $f_i: D \rightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, m$. Die Funktion f_i heißt i -te Koordinatenfunktion von \vec{f} . Man schreibt auch $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)^T$. Man nennt \vec{f} vektorwertige Funktion oder Abbildung, um zu unterstreichen, dass die Bilder keine reellen Zahlen sind ($m > 1$).

Definition 24. Eine Funktion $\vec{f}: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **stetig in** $\vec{x}_0 \in D$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)\| < \varepsilon$ für alle \vec{x} mit $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$. Die Funktion \vec{f} heißt **stetig**, falls \vec{f} in allen Punkten \vec{x} des Definitionsbereiches D stetig ist.

Eine Funktion $\vec{f}: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **differenzierbar in** einem inneren Punkt $\vec{x}_0 \in D$, falls es eine (m, n) -Matrix A gibt, so dass

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - A(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = \vec{0}.$$

Die Funktion \vec{f} heißt **differenzierbar in** D , falls \vec{f} in allen Punkten $\vec{x} \in D$ differenzierbar ist.

Bemerkung 6. Die Abbildung $\vec{x} \mapsto A(\vec{x} - \vec{x}_0)$ ist eine lineare vektorwertige Funktion $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, die in \vec{x}_0 den Wert $\vec{f}(\vec{x}_0)$ hat. Differenzierbarkeit bedeutet also wieder, dass lokal die Approximation durch eine lineare Funktion gut ist und der Fehler $\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - A(\vec{x} - \vec{x}_0)$ für $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$ schneller gegen $\vec{0}$ konvergiert, als der Abstand der Argumente $\|\vec{x} - \vec{x}_0\|$.

Satz 20. Es sei $\vec{f}: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)^T$ und $\vec{x}_0 \in D$.

Die Funktion \vec{f} ist genau dann stetig in \vec{x}_0 , wenn alle Koordinatenfunktionen f_i in \vec{x}_0 stetig sind.

Die Funktion \vec{f} ist genau dann differenzierbar in \vec{x}_0 , wenn alle Koordinatenfunktionen f_i in \vec{x}_0 differenzierbar sind. Es gilt dann

$$A = (a_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n} \text{ mit } a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0).$$

Beweis. Eine Folge in \mathbb{R}^m ist genau dann konvergent, wenn alle ihre Komponentenfolgen konvergent sind. \square

Definition 25. Es sei $\vec{f} : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)^T$ und $\vec{x}_0 \in D$. Sind die Koordinatenfunktionen f_i in \vec{x}_0 partiell differenzierbar, so nennt man die Matrix

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0) \right)_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

Jacobimatrix oder **Funktionalmatrix** von \vec{f} an der Stelle \vec{x}_0 . Falls $n = m$, so nennt man die Determinante

$$\det \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0) \right)$$

die **Jacobi-Determinante** oder **Funktionaldeterminante** von \vec{f} im Punkt \vec{x}_0 .

Bemerkung 7. Ist $m = 1$, so gilt $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} = (\text{grad } f)^T$.

Beispiel 58. Wir betrachten die Funktion $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2xy \\ e^y \end{pmatrix},$$

also $f_1(x, y) = x^2$, $f_2(x, y) = 2xy$ und $f_3(x, y) = e^y$. Es gilt

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 2y & 2x \\ 0 & e^y \end{pmatrix}.$$

Beispiel 59 (Polarkoordinaten in \mathbb{R}^2). Wir betrachten die Abbildung $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{f}(r, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial(r, \phi)} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix}, \quad \det \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial(r, \phi)} \right) = r.$$

Die Funktionaldeterminante verschwindet auf $\mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}$ nicht.

Beispiel 60 (Kugelkoordinaten). Wir betrachten die Abbildung

$$\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{f}(r, \phi, \psi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \cos \psi \\ r \sin \phi \cos \psi \\ r \sin \psi \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial(r, \phi, \psi)} = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi & -r \sin \phi \cos \psi & -r \cos \phi \sin \psi \\ \sin \phi \cos \psi & r \cos \phi \cos \psi & -r \sin \phi \sin \psi \\ \sin \psi & 0 & r \cos \psi \end{pmatrix},$$

$$\det \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial(r, \phi, \psi)} \right) = r^2 \sin^2 \psi \cos \psi + r^2 \cos^3 \psi = r^2 \cos \psi.$$

Die Funktionaldeterminante verschwindet auf $\mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2)$ nicht.

Beispiel 61 (Zylinderkoordinaten). Wir betrachten die Abbildung

$$\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{f}(r, \phi, \psi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ z \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial(r, \phi, z)} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial(r, \phi, z)} \right) = r.$$

Die Funktionaldeterminante verschwindet auf $\mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}^2$ nicht.

Die Ableitung der Verknüpfung differenzierbarer Funktionen läßt sich mit der Kettenregel berechnen. Wenn klar ist, welche Koordinaten im Definitionsbereich benutzt werden, so schreibt man auch kurz $D\vec{f}_{\vec{x}_0}$ für die Ableitung der Funktion \vec{f} im Punkt \vec{x}_0 .

Satz 21 (Kettenregel). *Es seien $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\vec{g}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$.*

Wenn \vec{f} in \vec{x}_0 und \vec{g} in $\vec{f}(\vec{x}_0)$ differenzierbar ist, dann ist die Funktion $\vec{h} = \vec{g} \circ \vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ in \vec{x}_0 differenzierbar und

$$D\vec{h}_{\vec{x}_0} = D\vec{g}_{\vec{f}(\vec{x}_0)} D\vec{f}_{\vec{x}_0}.$$

Bemerkung 8. Die Kettenregel besagt, dass die Ableitung der Verknüpfung $\vec{g} \circ \vec{f}$ das Matrixprodukt der Ableitungen der Funktionen \vec{g} und \vec{f} ist. Hier ist die Reihenfolge der Faktoren entscheidend, da $D\vec{g}$ eine (k, m) -Matrix und $D\vec{f}$ eine (m, n) -Matrix ist. Weiterhin muß man beachten, dass $D\vec{g}$ im Punkt $\vec{f}(\vec{x}_0)$ ausgewertet wird.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Kettenregel auszudrücken. Zum Beispiel

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0) = AB \text{ mit } A = \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{y}}(\vec{f}(\vec{x}_0)), B = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0),$$

wobei \vec{y} die Koordinaten in \mathbb{R}^m sind, oder noch suggestiver als „Kürzungsregel“

$$\frac{\partial \vec{z}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0) = \frac{\partial \vec{z}}{\partial \vec{y}}(\vec{y}_0) \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0)$$

mit $\vec{y}_0 = \vec{f}(\vec{x}_0)$. Dabei sieht man \vec{z} als Größe, die von den Parametern \vec{y} abhängt, $\vec{z} = \vec{g}(\vec{y})$, wobei \vec{y} wieder von den Variablen \vec{x} abhängig ist, $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$. Die Kettenregel beschreibt, wie sich die Ableitung ändert, wenn man die Menge der Variablen wechselt.

Beweis. Da \vec{f} in \vec{x}_0 differenzierbar ist und \vec{g} in $\vec{f}(\vec{x}_0)$ differenzierbar ist, gilt

$$\begin{aligned} \vec{h}(\vec{x}) - \vec{h}(\vec{x}_0) &= \vec{g}(\vec{f}(\vec{x})) - \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}_0)) = D\vec{g}_{\vec{f}(\vec{x}_0)}(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)) + \vec{r}_2(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)) \\ &= D\vec{g}_{\vec{f}(\vec{x}_0)}(D\vec{f}_{\vec{x}_0}(\vec{x} - \vec{x}_0) + \vec{r}_1(\vec{x} - \vec{x}_0)) + \vec{r}_2(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)) \\ &= D\vec{g}_{\vec{f}(\vec{x}_0)} D\vec{f}_{\vec{x}_0}(\vec{x} - \vec{x}_0) + D\vec{g}_{\vec{f}(\vec{x}_0)} \vec{r}_1(\vec{x} - \vec{x}_0) + \vec{r}_2(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)) \end{aligned}$$

mit Funktionen \vec{r}_1, \vec{r}_2 , die die Eigenschaft

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{\vec{r}_1(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = \vec{0}, \quad \lim_{\vec{f}(\vec{x}) \rightarrow \vec{f}(\vec{x}_0)} \frac{\vec{r}_2(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0))}{\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)\|} = \vec{0}$$

haben. Da $\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0) = D\vec{f}_{\vec{x}_0}(\vec{x} - \vec{x}_0) + \vec{r}_1(\vec{x} - \vec{x}_0)$ erhalten wir auch

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{\vec{r}_2(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0))}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{\vec{r}_2(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0))}{\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)\|} \frac{\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)\|}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = \vec{0}.$$

□

Bemerkung 9. Wenn $n = k = 1$, dann $D\vec{h}_{\vec{x}_0} = (\text{grad } g)_{\vec{f}(\vec{x}_0)}^T D\vec{f}_{\vec{x}_0}$. Für eine differenzierbare Kurve $\vec{c} = (c_1, \dots, c_n)^T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gilt deshalb

$$D(f \circ \vec{c})_{\vec{x}_0} = \langle (\text{grad } f)_{\vec{c}(\vec{x}_0)}, D\vec{c}_{\vec{x}_0} \rangle = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{c}(\vec{x}_0)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{c}(\vec{x}_0)) \right) \begin{pmatrix} c'_1(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ c'_n(\vec{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $D\vec{c}_{\vec{x}_0}$ heißt **Tangentialvektor** an die Kurve \vec{c} im Punkt $\vec{c}(\vec{x}_0)$. Wir sehen, dass der Tangentialvektor $D\vec{c}_{\vec{x}_0}$ senkrecht auf dem Gradienten $(\text{grad } f)_{\vec{c}(\vec{x}_0)}$ steht, falls $f \circ \vec{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine konstante Funktion ist, die Spur der Kurve \vec{c} also eine Höhenlinie beschreibt.

Folgerung 10. Wenn $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \vec{f}(x_1, \dots, x_n)$, und $\vec{g} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$, $(y_1, \dots, y_m) \mapsto \vec{g}(y_1, \dots, y_m)$ und $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)^T$, dann gilt für $\vec{h} = \vec{g} \circ \vec{f}$

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial x_j}(\vec{x}_0) = \sum_{l=1}^m \frac{\partial \vec{g}}{\partial y_l}(\vec{f}(\vec{x}_0)) \frac{\partial f_l}{\partial x_j}(\vec{x}_0).$$

Beispiel 62. Wir betrachten die Funktion $\vec{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\vec{g}(x, y) = (x^2, xy, y^2)^T$ und die Funktion $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\vec{f}(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)^T$ (Polarkoordinaten). Es gilt $\vec{h}(r, \phi) = \vec{g}(\vec{f}(r, \phi)) = (r^2 \cos^2 \phi, r^2 \cos \phi \sin \phi, r^2 \sin^2 \phi)^T$. Nun berechnen wir $D\vec{h}$ einmal direkt und einmal mit Hilfe der Kettenregel. Es gilt

$$D\vec{h} = \frac{\partial \vec{h}}{\partial (r, \phi)} = \begin{pmatrix} 2r \cos^2 \phi & -2r^2 \cos \phi \sin \phi \\ 2r \sin \phi \cos \phi & 2r^2(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \\ 2r \sin^2 \phi & 2r^2 \sin \phi \cos \phi \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} D\vec{g}D\vec{f} &= \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x \cos \phi & -2xr \sin \phi \\ y \cos \phi + x \sin \phi & -ry \sin \phi + rx \cos \phi \\ 2y \sin \phi & 2yr \cos \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2r \cos^2 \phi & -2r^2 \cos \phi \sin \phi \\ 2r \sin \phi \cos \phi & 2r^2(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \\ 2r \sin^2 \phi & 2r^2 \sin \phi \cos \phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $x = r \cos \phi$ und $y = r \sin \phi$.

Beispiel 63 (Laplace-Operator in Polarkoordinaten). Für $g \in \mathcal{C}^2(D)$ mit $D \subset \mathbb{R}^2$ drücken wir $g_{xx} + g_{yy}$ in Polarkoordinaten $(x, y) = \vec{f}(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ aus.

Für $\vec{h} = g \circ \vec{f}$ gilt

$$\begin{aligned}
(h_r, h_\phi) &= (g_x, g_y) D\vec{f} = (g_x, g_y) \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} \\
&= (g_x \cos \phi + g_y \sin \phi, -r g_x \sin \phi + r g_y \cos \phi) \\
h_{rr} &= (g_x \cos \phi + g_y \sin \phi)_r = \cos \phi \frac{\partial g_x}{\partial r} + \sin \phi \frac{\partial g_y}{\partial r} \\
&= \cos \phi (g_{xx} \cos \phi + g_{xy} \sin \phi) + \sin \phi (g_{yx} \cos \phi + g_{yy} \sin \phi) \\
&= g_{xx} \cos^2 \phi + 2g_{xy} \sin \phi \cos \phi + g_{yy} \sin^2 \phi \\
h_{\phi\phi} &= -r g_x \cos \phi - r g_y \sin \phi - r \sin \phi \frac{\partial g_x}{\partial \phi} + r \cos \phi \frac{\partial g_y}{\partial \phi} \\
&= -r(g_x \cos \phi + g_y \sin \phi) \\
&\quad - r \sin \phi (-r g_{xx} \sin \phi + r g_{xy} \cos \phi) + r \cos \phi (-r g_{yx} \sin \phi + r g_{yy} \cos \phi) \\
&= -r(g_x \cos \phi + g_y \sin \phi) + r^2 g_{xx} \sin^2 \phi - 2r^2 g_{xy} \sin \phi \cos \phi + r^2 g_{yy} \cos^2 \phi,
\end{aligned}$$

da $g_{xy} = g_{yx}$ und wir überprüfen

$$\begin{aligned}
h_{rr} + \frac{1}{r} h_r + \frac{1}{r^2} h_{\phi\phi} &= g_{xx} \cos^2 \phi + 2g_{xy} \sin \phi \cos \phi + g_{yy} \sin^2 \phi \\
&\quad + \frac{1}{r} (g_x \cos \phi + g_y \sin \phi) \\
&\quad - \frac{g_x \cos \phi + g_y \sin \phi}{r} + g_{xx} \sin^2 \phi - 2g_{xy} \sin \phi \cos \phi + g_{yy} \cos^2 \phi \\
&= g_{xx} + g_{yy},
\end{aligned}$$

da $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$.

Beispiel 64 (Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten). Für $g \in \mathcal{C}^2(D)$ mit $D \subset \mathbb{R}^3$ drücken wir $g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}$ in Zylinderkoordinaten $\vec{f}(r, \phi, z) = (r \cos \phi, r \sin \phi, z)$ aus. Das Resultat folgt sofort aus dem Laplaceoperator in Polarkoordinaten, da

$$D\vec{f} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$h_{rr} + \frac{1}{r} h_r + \frac{1}{r^2} h_{\phi\phi} + h_{zz} = g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}.$$

Beispiel 65 (Laplace-Operator in Kugelkoordinaten). Für $g \in \mathcal{C}^2(D)$ mit $D \subset \mathbb{R}^3$ drücken wir $g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}$ in Kugelkoordinaten

$$\vec{f}(r, \phi, \psi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \cos \psi \\ r \sin \phi \cos \psi \\ r \sin \psi \end{pmatrix}$$

aus. Wir könnten versuchen, zur Berechnung die Funktionalmatrix von \vec{f} , die in Beispiel 60 bestimmt wurde, zu benutzen. Es ist aber bequemer, die Kugelkoordinaten als Verknüpfung von Polarkoordinaten in der (x, z) -Ebene mit Zylinderkoordinaten zu schreiben. Also

$$\vec{f} = \vec{\Phi} \circ \vec{\Psi}, \quad \text{mit } \vec{\Psi}(r, \phi, \psi) = \begin{pmatrix} r \cos \psi \\ \phi \\ r \sin \psi \end{pmatrix}, \quad \vec{\Phi}(\rho, \phi, z) = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix}.$$

Der Laplace-Operator von $g \circ \vec{\Phi}$ in (ρ, ϕ, z) -Koordinaten ist

$$(g \circ \vec{\Phi})_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}(g \circ \vec{\Phi})_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}(g \circ \vec{\Phi})_{\phi\phi} + (g \circ \vec{\Phi})_{zz}.$$

Da sich die Koordinate ϕ unter der Abbildung $\vec{\Psi}$ nicht ändert, gilt $(g \circ \vec{\Phi})_{\phi\phi} = (g \circ \vec{\Phi} \circ \vec{\Psi})_{\phi\phi}$. Nun schreiben wir den Laplace-Operator von $g \circ \vec{\Phi}$ bezüglich (ρ, z) -Koordinaten in Polarkoordinaten, die durch $\vec{\Psi}$ gegeben sind, also mit $h = g \circ \vec{\Phi} \circ \vec{\Psi}$

$$(g \circ \vec{\Phi})_{\rho\rho} + (g \circ \vec{\Phi})_{zz} = h_{rr} + \frac{1}{r}h_r + \frac{1}{r^2}h_{\psi\psi}.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}h_r - \frac{\tan \psi}{r^2}h_{\psi} &= \frac{1}{r}((g \circ \vec{\Phi})_{\rho} \cos \psi + (g \circ \vec{\Phi})_z \sin \psi) \\ &\quad - \frac{\tan \psi}{r^2}(-r(g \circ \vec{\Phi})_{\rho}) \sin \psi + r(g \circ \vec{\Phi})_z \cos \psi \\ &= \frac{1}{r}(g \circ \vec{\Phi})_{\rho} \cos \psi + \frac{\tan \psi}{r^2}r(g \circ \vec{\Phi})_{\rho} \sin \psi \\ &= \frac{\cos \psi}{\rho}(g \circ \vec{\Phi})_{\rho} \cos \psi + \frac{\cos \psi \tan \psi}{\rho}(g \circ \vec{\Phi})_{\rho} \sin \psi \\ &= \frac{1}{\rho}(g \circ \vec{\Phi})_{\rho}. \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$h_{xx} + h_{yy} + h_{zz} = h_{rr} + \frac{2}{r}h_r + \frac{1}{r^2}h_{\psi\psi} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \phi}h_{\phi\phi} - \frac{\tan \psi}{r^2}h_{\psi}.$$

Folgerung 11 (Integrale mit parameterabhängigen Integrationsgrenzen und Integranden). Seien $\phi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\phi(x) < \psi(x)$ für alle $x \in [a, b]$ und $f \in C^1(D)$ mit $D = \{(x, y)^T : x \in [a, b], \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$. Dann ist die Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

auf $[a, b]$ differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f_x(x, y) dy + f(x, \psi(x))\psi'(x) - f(x, \phi(x))\phi'(x).$$

Beweis. Wir benutzen die Substitution $y = \phi(x) + t(\psi(x) - \phi(x))$, das bedeutet $dy = (\psi(x) - \phi(x)) dt$, und erhalten

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy = \int_0^1 f(x, \phi(x) + t(\psi(x) - \phi(x)))(\psi(x) - \phi(x)) dt \\ &= (\psi(x) - \phi(x)) \int_0^1 f(x, \phi(x) + t(\psi(x) - \phi(x))) dt \\ &= (\psi(x) - \phi(x)) \int_0^1 g(x, t) dt \end{aligned}$$

mit $g(x, t) = f(x, \phi(x) + t(\psi(x) - \phi(x)))$. Da jetzt die Integrationsgrenzen nicht mehr von x abhängen und $g(x, t)$ stetig differenzierbar ist, gilt mit der Funktion $y(x, t) = \phi(x) + t(\psi(x) - \phi(x))$

$$\begin{aligned}
F'(x) &= (\psi'(x) - \phi'(x)) \int_0^1 g(x, t) dt + (\psi(x) - \phi(x)) \int_0^1 g_x(x, t) dt \\
&= (\psi'(x) - \phi'(x)) \int_0^1 g(x, t) dt \\
&\quad + (\psi(x) - \phi(x)) \int_0^1 f_x(x, y(x, t)) + f_y(x, y(x, t)) y_x(x, t) dt \\
&= (\psi'(x) - \phi'(x)) \int_0^1 g(x, t) dt + (\psi(x) - \phi(x)) \int_0^1 f_x(x, y(x, t)) dt \\
&\quad + (\psi(x) - \phi(x)) \int_0^1 f_y(x, y(x, t)) y_x(x, t) dt \\
&= (\psi'(x) - \phi'(x)) \int_0^1 g(x, t) dt + \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f_x(x, y) dy + \int_0^1 g_t(x, t) y_x(x, t) dt \\
&= (\psi'(x) - \phi'(x)) \int_0^1 g(x, t) + t g_t(x, t) dt + \phi'(x) \int_0^1 g_t(x, t) dt \\
&\quad + \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f_x(x, y) dy \\
&= (\psi'(x) - \phi'(x)) [t g(x, t)]_0^1 + \phi'(x) (g(x, 1) - g(x, 0)) + \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f_x(x, y) dy \\
&= \psi'(x) f(x, \psi(x)) - \phi'(x) f(x, \phi(x)) + \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f_x(x, y) dy
\end{aligned}$$

da $g_t(x, t) = f_y(x, y(x, t))(\psi(x) - \phi(x))$ und $(t g)_t = g + t g_t$. □

Bemerkung 10. Für $\phi(x) \equiv x_0$, $\psi(x) = x$ und $f(x, y) = f(y)$ erhält man die Aussage, dass die Integration $F(x) = \int_{x_0}^x f(y) dy$ eine Stammfunktion liefert, also $F'(x) = f(x)$, da $f_x = \phi' \equiv 0$ und $\psi' \equiv 1$.

3.7. Mittelwertsatz, Poincarésches Lemma, Taylorreihen. In diesem Abschnitt betrachten wir wieder Funktionen $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$. Die Anwendung der Resultate aus diesem Abschnitt auf die Komponentenfunktionen einer vektorwertigen Funktion $\vec{f} : \mathbb{R}^n \subset D \rightarrow \mathbb{R}^m$ liefern die entsprechenden Aussagen für vektorwertige Funktionen.

Als einfache Folgerung aus dem Mittelwertsatz für Funktionen einer Variablen erhalten wir den Mittelwertsatz für Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn mit je zwei Punkten $\vec{x}_0, \vec{x}_1 \in D$ auch ihre Verbindungsstrecke $\{\vec{x}_0 + t(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) : t \in [0, 1]\}$ in D enthalten ist.

Satz 22 (Mittelwertsatz). *Es sei $f \in \mathcal{C}^1(D)$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Dann existiert zu $\vec{x}_0, \vec{x}_1 \in D$ ein $\delta \in [0, 1]$, so dass*

$$f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0 + \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_0))(\vec{x}_1 - \vec{x}_0).$$

Beweis. Die Funktion $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(t) = f(\vec{x}_0 + t(\vec{x}_1 - \vec{x}_0))$ ist auf $[0, 1]$ stetig differenzierbar. Außerdem ist $h = f \circ \vec{c}$ für die Kurve $\vec{c} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\vec{c}(t) = \vec{x}_0 + t(\vec{x} - \vec{x}_0)$. Da $D\vec{c}_t = \vec{x} - \vec{x}_0$ für alle $t \in [0, 1]$ erhalten wir mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} h(1) - h(0) &= h'(\vec{x}_0 + \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_0))1 = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0 + \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)) \frac{\partial \vec{c}}{\partial t}(\delta) \\ &= \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0 + \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_0))(\vec{x} - \vec{x}_0) \end{aligned}$$

für ein $\delta \in [0, 1]$. □

Bemerkung 11. Der Vektor $(\partial f)/(\partial \vec{x})(\vec{x}_0 + \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_0))$ ist ein Zeilenvektor und $\vec{x} - \vec{x}_0$ ist ein Spaltenvektor. Ihr Produkt ist deshalb eine (reelle) Zahl.

Eine offene Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **zusammenhängend**, wenn aus $D = D_1 \cup D_2$ und $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ für zwei offene Mengen D_1, D_2 folgt, dass $D_1 = \emptyset$ oder $D_2 = \emptyset$. Eine offene Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist zusammenhängend, wenn man je zwei Punkte in D durch einen Polygonzug, also eine Aneinanderreihung von Strecken, verbinden kann, der ganz in D enthalten ist. Eine Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Gebiet**, wenn G offen und zusammenhängend ist. Als Folgerung aus dem Mittelwertsatz können wir jetzt das Poincarésche Lemma formulieren.

Folgerung 12 (0. Poincarésches Lemma). *Es seien G ein Gebiet und $f \in \mathcal{C}^1(G)$. Die Funktion f ist genau dann konstant in G , wenn $(Df)_{\vec{x}} = \vec{0}$ für alle $\vec{x} \in G$.*

Beweis. Wir verbinden die zwei Punkte \vec{x} und \vec{x}_0 durch einen Streckenzug, der ganz in D liegt, und wenden auf jede Strecke den Mittelwertsatz an. □

Bemerkung 12. Dieses Lemma wird uns später sichern, dass das Potential eines Vektorfeldes, falls es existiert, bis auf eine Konstante auf einem Gebiet eindeutig bestimmt ist.

Beispiel 66. Wir betrachten das Gebiet $G = \{(x, y) : x > 0 \text{ und } y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ und die Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \arctan(y/x) + \arctan(x/y)$. Es gilt

$$f_x(x, y) = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \frac{-y}{x^2} + \frac{1}{1 + (x/y)^2} \frac{1}{y} = \frac{-y}{x^2 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^2} = 0$$

und aus Symmetriegründen auch $f_y(x, y) = 0$. Da G ein Gebiet ist, ist f auf G konstant. Wir berechnen diese Konstante dadurch, dass wir einen Funktionswert bestimmen. Es gilt $f(1, 1) = 2 \arctan(1) = 2\pi/4 = \pi/2$. Wir haben folgendes „Additionstheorem“ bewiesen:

$$\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Die Approximation von Funktionen einer Variablen durch Taylorpolynome läßt sich wiederum durch die Betrachtung der Verkettung $f \circ \vec{c}$ von f mit der Kurve $\vec{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{c}(t) = \vec{x}_0 + t(\vec{x} - \vec{x}_0)$, zu einer Aussage für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ verallgemeinern. Hier benutzen wir die Notation

$$\langle \vec{h}, \text{grad} \rangle = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \langle \vec{h}, \text{grad} \rangle^k = \sum_{j_k=1}^n \cdots \sum_{j_1=1}^n h_{j_1} \cdots h_{j_k} \frac{\partial^k}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \cdots \partial x_{j_k}}$$

für $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

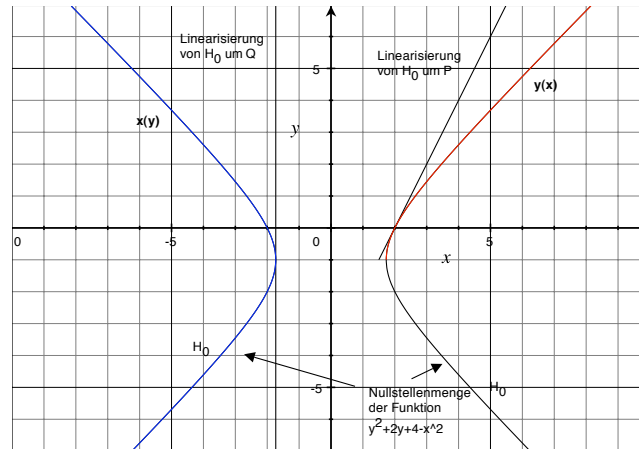


ABBILDUNG 15. Parametrisierung einer Höhenlinie

Satz 23 (Satz von Taylor). *Es seien D eine offene konvexe Menge und $f \in \mathcal{C}^{m+1}(D)$. Für beliebige $\vec{x}, \vec{x}_0 \in D$ gilt*

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \langle \vec{x} - \vec{x}_0, \text{grad} \rangle^k f(\vec{x}_0) + R_{m, \vec{x}_0}(\vec{x}),$$

mit dem Restglied

$$R_{m, \vec{x}_0}(\vec{x}) = \frac{1}{(m+1)!} \langle \vec{x} - \vec{x}_0, \text{grad} \rangle^{m+1} f(\vec{x}_0 + \delta(\vec{x} - \vec{x}_0))$$

für ein $\delta \in [0, 1]$.

Bemerkung 13. Für $m = 0$ ist der Satz von Taylor gerade der Mittelwertsatz.

Bemerkung 14. Der Satz von Taylor (und der Mittelwertsatz) können für die Fehlerrechnung benutzt werden, wenn es möglich ist, das Restglied abzuschätzen.

3.8. Implizite Funktionen. Manchmal ist eine Funktion f nicht nur durch eine explizite Berechnungsvorschrift wie zum Beispiel $f(x) = x^2$ gegeben, sondern implizit durch eine Gleichung.

Beispiel 67 (Parametrisierung einer Niveaumenge). Wir betrachten die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = y^2 + 2y + 4 - x^2$ und ihre Nullstellen Menge, also die Höhenlinie $H_0 = \{(x, y)^T : g(x, y) = 0\} \subset \mathbb{R}^2$.

Wie ein Blick auf die Abbildung 15 zeigt, ist die Menge H_0 weder der Graph einer Funktion $y(x)$ noch der Graph einer Funktion $x(y)$, da es in H_0 mindestens zwei Punkte mit gleicher x -Koordinate und mindestens zwei Punkte mit gleicher y -Koordinate gibt. Da $g(2, 0) = g(\sqrt{3}, -1) = 0$, sind die Punkte $P = (2, 0)^T$ und $Q = (\sqrt{3}, -1)^T$ in der Menge H_0 . Können wir die Menge H_0 in der Nähe dieser Punkte als Graph einer Funktion schreiben?

Durch Auflösung der Gleichung $g(x, y) = 0$ nach y erhalten wir $y = -1 \pm \sqrt{x^2 - 3}$. In der Nähe des Punktes P müssen wir $y(x) = -1 + \sqrt{x^2 - 3}$ wählen, denn $0 = -1 + \sqrt{2^2 - 3}$. Jedoch ist die Funktion $y(x)$ nur für $x \geq \sqrt{3}$ definiert und die Spur der Kurve $x \mapsto (x, y(x))$ ist nur ein Teil der Höhenlinie (in Abbildung 15 rot).

In der Nähe des Punktes Q bringt uns die Auflösung der Gleichung $g(x, y) = 0$ nach y nicht weiter, da keine Wahl des Vorzeichens eine Funktion $y(x)$ in einem offenen Intervall um $-\sqrt{3}$ definiert. Der Grund dafür ist, dass die Linearisierung von H_0 um den Punkt Q eine Parallele zur y -Achse ist, die erste Komponente des Tangentialvektors an H_0 in Q also verschwindet.

Hier kann y als Parameter benutzt werden. Umstellen der Gleichung $g(x, y) = 0$ nach x liefert $x = \pm\sqrt{y^2 + 2y + 4}$. In der Nähe des Punktes Q müssen wir $x(y) = -\sqrt{y^2 + 2y + 4}$ wählen, denn $-\sqrt{3} = -\sqrt{(-1)^2 - 2 + 4}$. Die Kurve $y \mapsto (-\sqrt{y^2 + 2y + 4}, y)^T$ ist auf \mathbb{R} definiert. Ihre Spur ist ebenfalls eine Teilmenge der Höhenlinie (in Abbildung 15 blau).

Das Beispiel beschreibt einen Aspekt der allgemeinen Situation sehr gut. Eine Niveaumenge N läßt sich in der Nähe eines Punktes P als Graph einer Funktion darstellen, wenn man in der Linearisierung von N in P , dies ist ein lineares Gleichungssystem, die anderen Variablen eliminieren kann.

Satz 24 (Satz über implizite Funktionen). *Es seien $\vec{g} : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^m$ mit $\vec{g}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = 0$. Wenn $\vec{g} \in \mathcal{C}^1(U)$ für eine Umgebung U des Punktes (\vec{x}_0, \vec{y}_0) und*

$$\det \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial (y_1, \dots, y_m)}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \right) \neq 0,$$

dann gibt es eine Umgebung U_0 von \vec{x}_0 , eine Umgebung V_0 von \vec{y}_0 und eine Funktion $\vec{f} : \mathbb{R}^n \supset U_0 \rightarrow V_0 \subset \mathbb{R}^m$, so dass $\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{y}_0$ und für $(\vec{x}, \vec{y}) \in U_0 \times V_0$ genau dann $\vec{g}(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ gilt, wenn $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$.

Bemerkung 15. Das lineare Gleichungssystem

$$D\vec{g}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)^T} \begin{pmatrix} \vec{x} - \vec{x}_0 \\ \vec{y} - \vec{y}_0 \end{pmatrix} = 0$$

ist die Linearisierung des Gleichungssystems $\vec{g}(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ um den Punkt $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)^T$. Die Bedingung des Satzes über implizite Funktionen bedeutet, dass man die (m, m) -Untermatrix aus den letzten m Spalten invertierbar ist und die letzten m Variablen y_1, \dots, y_m durch die ersten n , also x_1, \dots, x_n , ausgedrückt werden können:

$$-\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial (y_1, \dots, y_m)}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \right)^{-1} \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial (x_1, \dots, x_n)}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \right) (\vec{x} - \vec{x}_0) = (\vec{y} - \vec{y}_0).$$

Beweis. Wir betrachten die Komponentenfunktionen $\vec{g} = (g_1, \dots, g_m)^T$. Durch Permutation der Variablen y_1, \dots, y_m können wir immer erreichen, dass

$$\frac{\partial g_m}{\partial y_m}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \neq 0$$

gilt. Es gibt ein offenes Intervall U_m um $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)^T$, so dass

$$\frac{\partial g_m}{\partial y_m}(\vec{x}, \vec{y}) \neq 0 \quad \forall (\vec{x}, \vec{y})^T \in U_m.$$

Wir definieren eine neue Variable $\eta_m = g_m(\vec{x}, \vec{y})$. Da η_m als Funktion von y_m mit Konstanten $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}$ streng monoton und stetig ist, gibt es ein Umkehrfunktion f_m mit $y_m = f_m(\vec{x}, y_1, \dots, y_{m-1}, \eta_m)$. Für alle $(\vec{x}, \vec{y})^T \in U_m$

$$g_m(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{y} = (y_1, \dots, y_{m-1}, f_m(\vec{x}, y_1, \dots, y_{m-1}, 0))^T.$$

Statt der verbleibenden $m - 1$ Gleichungen $g_1(\vec{x}, \vec{y}) = \dots = g_{m-1}(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ betrachten wir nun die Abbildung $\vec{\gamma} : \mathbb{R}^{n+m-1} \supset D \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ mit

$$\vec{\gamma}(\vec{x}, y_1, \dots, y_{m-1}) = \begin{pmatrix} g_1(\vec{x}, y_1, \dots, y_{m-1}, f_m(\vec{x}, y_1, \dots, y_{m-1}, 0)) \\ \vdots \\ g_{m-1}(\vec{x}, y_1, \dots, y_{m-1}, f_m(\vec{x}, y_1, \dots, y_{m-1}, 0)) \end{pmatrix}$$

und $D = \{(\vec{x}, y_1, \dots, y_{m-1}) : \exists y_m : (\vec{x}, y_1, \dots, y_m) \in U_m\}$. Da für alle $(\vec{x}, \vec{y}) \in U_m \cap \{g_m = 0\}$ und für alle $j = 1, \dots, m - 1$ gilt

$$\frac{\partial g_m}{\partial y_j}(\vec{x}, \vec{y}) = 0,$$

folgt aus der Bedingung

$$\det \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, \vec{y}) \right) \neq 0$$

für $(\vec{x}, \vec{y})^T \in U_m$ sofort

$$\det \left(\frac{\partial \vec{\gamma}}{\partial (y_1, \dots, y_{m-1})}(\vec{x}, y_1, \dots, y_{m-1}) \right) \neq 0$$

für alle $(\vec{x}, y_1, \dots, y_{m-1})^T \in D$. Mit vollständiger Induktion über die Anzahl m der Gleichungen folgt die Aussage des Satzes. \square

Beispiel 68. Wir betrachten die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = y^2 + 2y + 4 - x^2$ wie in Beispiel 67. Es gilt $Dg_{(2,0)^T} = (-2x, 2y + 2)_{(2,0)^T} = (-4, 2)$. Also kann man die Gleichung $g(x, y) = 0$ in der Nähe des Punktes $(2, 0)^T$ nach y auflösen. Aber es gilt $Dg_{(\sqrt{3}, -1)^T} = (-2x, 2y + 2)_{(\sqrt{3}, -1)^T} = (-2\sqrt{3}, 0)$. Deshalb kann man die Gleichung $g(x, y) = 0$ in der Nähe des Punktes $(\sqrt{3}, -1)^T$ nicht nach y auflösen. Jedoch kann man sie dort nach x auflösen.

3.8.1. *Implizites Differenzieren.* Wenn $\vec{h}(\vec{x}) := \vec{g}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) \equiv 0$, $\vec{g} \in C^1$ und

$$\det \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) \right) \neq 0,$$

so folgt aus der Kettenregel

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial x_j} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_j}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) + \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j}(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Insbesondere ist \vec{f} partiell differenzierbar. Durch Umstellung dieser Gleichung nach der partiellen Ableitung von \vec{f} erhält man

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j}(\vec{x}) = - \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) \right)^{-1} \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_j}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})).$$

Diese Formel eignet sich, um die Ableitungen von \vec{f} im Punkt \vec{x}_0 auszurechnen, da der Funktionswert $\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{y}_0$ bekannt ist.

Beispiel 69. Wir betrachten die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = y^2 + 2y + 4 - x^2$ wie in Beispiel 67 und den Punkt $(x_0, y_0)^T = (2, 0)^T$. Da $g_x(x, y) = -2x$ und $g_y(x, y) = 2y + 2$, folgt aus $g(x, f(x)) \equiv 0$ um $x_0 = 2$ und $f(2) = 0$, dass

$$f'(2) = -(g_y(2, 0))^{-1}(g_x(2, 0)) = -\frac{1}{2}(-4) = 2.$$

Dies ist einfacher als erst die Auflösung $y = f(x) = -1 + \sqrt{x^2 - 3}$ konkret zu bestimmen und dann diese explizit gegebene Funktion abzuleiten:

$$f'(x) = x(x^2 - 3)^{-1/2}, \quad f'(2) = 2 \frac{1}{\sqrt{4 - 3}} = 2.$$

Beispiel 70 (Zwei Gleichungen). Wir betrachten die Abbildung $\vec{g} : \mathbb{R}^{2+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{g}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2 y_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\vec{g}(0, x_2, 0, 0) = \vec{0}$ für alle $x_2 \in \mathbb{R}$ und

$$D\vec{g} = \begin{pmatrix} 2x_1 & -y_2 & 0 & -x_2 \\ y_2 & -y_1 & -x_2 & x_1 \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{g}}{\partial (y_1, y_2)} \end{pmatrix} = -x_2^2.$$

Also ist die Gleichung $\vec{g}(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ auf $\{x_2 \neq 0\}$ nach \vec{y} auflösbar. Explizit lautet diese Auflösung $y_2 = x_1^2/x_2$ und $y_1 = x_1 y_2/x_2 = x_1^3/x_2^2$ also

$$\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^3/x_2^2 \\ x_1^2/x_2 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Ableitungsmatrix $D\vec{f}$ einmal explizit und einmal implizit:

$$\begin{aligned} D\vec{f} &= \begin{pmatrix} 3x_1^2/x_2^2 & -2x_1^3/x_2^3 \\ 2x_1/x_2 & -x_1^2/x_2^2 \end{pmatrix} \\ D\vec{f} &= - \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) \right)^{-1} \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = - \begin{pmatrix} 0 & -x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x_1 & -y_2 \\ y_2 & -y_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_2^2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_1 & -y_2 \\ y_2 & -y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{x_2^2} \begin{pmatrix} 2x_1^2 + x_2 y_2 & -x_1 y_2 - y_1 x_2 \\ 2x_1 x_2 & -x_2 y_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_2^2} \begin{pmatrix} 3x_1^2 & -2x_1 y_2 \\ 2x_1 x_2 & -x_1^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{x_2^2} \begin{pmatrix} 3x_1^2 & -2x_1^3/x_2 \\ 2x_1 x_2 & -x_1^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

da $x_2 y_2 = x_1^2$, $y_1 x_2 = x_1 y_2$, wenn $\vec{g}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$ und $x_2 \neq 0$.

Im Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ ist die Gleichung $\vec{g}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$ nicht nach zwei der vier Variablen auflösbar, weil in dem Punkt keine $(2, 2)$ -Untermatrix von $D\vec{g}$ invertierbar ist.

3.8.2. Umkehrabbildungen. Wir betrachten eine Abbildung $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und wollen wissen, ob eine **Umkehrabbildung**, also eine Abbildung $\vec{f}^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\vec{f}^{-1}(\vec{f}(\vec{x})) = \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, existiert. Diese Frage ist im Allgemeinen schwer zu beantworten. Zum Beispiel müsste man entscheiden können, ob die Abbildung injektiv ist und die Bildmenge $\vec{f}(\mathbb{R}^n)$ gut beschreiben können. Wenn uns die Abbildung \vec{f} aber nur in der Nähe eines Punktes \vec{x}_0 interessiert und wir nur nach einer Umkehrabbildung in der Nähe des Bildpunktes $\vec{f}(\vec{x}_0)$ suchen, so gibt uns die Differentialrechnung ein handliches Kriterium.

Satz 25 (Lokale Umkehrabbildung). *Es seien $\vec{f} \in \mathcal{C}^1(U)$ mit $U \supset \mathbb{R}^n$ und $\vec{x}_0 \in U$. Wenn $\det(D\vec{f}_{\vec{x}_0}) \neq 0$, dann existieren eine offene Umgebung V_0 von $\vec{f}(\vec{x}_0)$, eine offene Umgebung U_0 von \vec{x}_0 und eine Abbildung $\vec{h} : V_0 \rightarrow U_0$, so dass $\vec{h}(\vec{f}(\vec{x})) = \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in U_0$.*

Die lokale Umkehrabbildung \vec{h} ist stetig differenzierbar. Die Jacobi-Matrix der Umkehrabbildung \vec{h} ist die Inverse der Jacobi-Matrix von \vec{f} , genauer:

$$D\vec{h}_{\vec{y}} = (D\vec{f}_{\vec{h}(\vec{y})})^{-1}.$$

Beweis. Wir wenden den Satz über implizite Funktionen auf die Funktion $\vec{g} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\vec{g}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{y} - \vec{f}(\vec{x})$ und den Punkt $(\vec{x}_0, \vec{f}(\vec{x}_0))^T$ an. Da

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{x}} = -\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}},$$

ist die Gleichung $\vec{y} - \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$ in der Nähe des Punktes $(\vec{x}_0, \vec{f}(\vec{x}_0))^T$ nach \vec{x} auflösbar. Also $\vec{y} - \vec{f}(\vec{h}(\vec{y})) = \vec{0}$. Da $\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{y}} = \text{Id}$, die Einheitsmatrix, ist, folgt sofort

$$D\vec{h} = -\left(-\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right)^{-1} \text{Id} = \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right)^{-1}.$$

□

Beispiel 71 (Polarkoordinaten). Die Abbildung $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{f}(r, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix}$$

hat die Funktionaldeterminante $\det(D\vec{f}) = r$ (siehe Beispiel 59). Deshalb ist die Abbildung für $r > 0$ lokal umkehrbar. Obwohl $\vec{f}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$, existiert keine Umkehrabbildung, die auf \mathbb{R}^2 definiert ist. Ein maximales Definitionsgebiet für eine lokale Umkehrabbildung ist zum Beispiel $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$. Dort wird durch

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \begin{cases} \arctan(y/x) & x > 0 \\ \text{arccot}(x/y) & y > 0 \\ -\pi + \text{arccot}(x/y) & y < 0 \end{cases}$$

eine Abbildung definiert. Es gilt $\lim_{y \rightarrow 0^+} \phi(-1, y) = \pi$ und $\lim_{y \rightarrow 0^-} \phi(-1, y) = -\pi$.

Beispiel 72 (Kugelkoordinaten). Die Abbildung

$$\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{f}(r, \phi, \psi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \cos \psi \\ r \sin \phi \cos \psi \\ r \sin \psi \end{pmatrix},$$

hat die Funktionaldeterminante $\det(D\vec{f}) = r^2 \cos \psi$ (siehe Beispiel 60). Die Funktionaldeterminante verschwindet auf $\mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2)$ nicht. Dort ist \vec{f} lokal umkehrbar. Die Umkehrabbildung auf $\mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}^2$ ist durch

$$\vec{f}^{-1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \arctan(y/x) \\ \arcsin(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \end{pmatrix}$$

gegeben.

Bemerkung 16. Wenn $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$ eine Umkehrabbildung besitzt, so kann man statt der Koordinaten \vec{x} auch die Koordinaten \vec{y} benutzen und verliert keine Informationen.

3.9. Extrema für Funktionen mehrerer Veränderlicher. Wir wollen die Extremwerte und Extremstellen einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ bestimmen. Wir benutzen die Differentialrechnung, um lokale Extremstellen zu bestimmen, die innere Punkte des Definitionsbereiches sind. Durch Vergleich der lokalen Extremwerte untereinander und mit den Funktionswerten von f in nicht inneren Punkten, z.B. Randpunkten eines abgeschlossenen Intervalls, kann man dann eventuell die globalen Extremwerte von f bestimmen. Jedoch ist die Bestimmung globaler Extremwerte ungleich komplizierter als bei Funktionen einer Veränderlicher.

3.9.1. Lokale Extremwerte.

Definition 26. Ein Punkt $\vec{x}_0 \in D$ heißt **lokales Maximum (Minimum)** von f , wenn es eine offene Umgebung $U \subset D$ von \vec{x}_0 gibt, so dass $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$ (bzw. $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$) für alle $\vec{x} \in U$.

Ein Punkt $\vec{x}_0 \in D$ heißt **strenges lokales Maximum (Minimum)** von f , wenn es eine offene Umgebung $U \subset D$ von \vec{x}_0 gibt, so dass für alle $\vec{x} \in U$ mit $\vec{x} \neq \vec{x}_0$ die echte Ungleichung $f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0)$ (bzw. $f(\vec{x}) > f(\vec{x}_0)$) gilt..

Manchmal nennt man lokale Extremstellen auch **relative** Extremstellen. Ein Punkt $\vec{x}_0 \in D$ ist genau dann ein lokales Minimum (Maximum), wenn für alle Kurven $c : \mathbb{R} \rightarrow D$ mit $c(0) = \vec{x}_0$ die Funktion $f \circ c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in $t = 0$ ein lokales Minimum (Maximum) hat. Natürlich kann man nicht alle Verknüpfungen mit Kurven testen, aber wenn f genügend oft stetig differenzierbar ist, reicht es, die partiellen Funktionen f_j mit $f_j(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{e}_j)$ zu untersuchen.

Satz 26 (Notwendiges Kriterium für ein lokales Extremum). Wenn $f \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $\vec{x}_0 \in D$ lokales Extremum, dann gilt $(\text{grad } f)_{\vec{x}_0} = \vec{0}$.

Beweis. Da die partiellen Funktionen $f(\vec{x}_0 + t\vec{e}_j)$ in $t = 0$ ein relatives Extremum haben, gilt $f_{x_j}(\vec{x}_0) = 0$ für alle j . □

Wenn im Punkt \vec{x}_0 alle partiellen Ableitungen verschwinden, also $Df_{\vec{x}_0} = \vec{0}$, dann nennt man \vec{x}_0 einen **kritischen Punkt** oder einen **stationären Punkt**.

Beispiel 73 (Drei grundlegende Beispiele). Wir betrachten die Funktionen $f, g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = -x^2 - y^2$ und $h(x, y) = xy$. Es gilt $Df = (2x, 2y)$, $Dg = (-2x, -2y)$ und $Dh = (y, x)$. Also ist $\vec{0}$ der einzige kritische Punkt der Funktionen.

Hier können wir leicht überprüfen, dass $\vec{0}$ ein lokales Minimum von f und ein lokales Maximum von g ist, denn $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ und $f(x, y) > 0$ und $g(x, y) < 0$, wenn $x \neq 0$ oder $y \neq 0$. (In diesem Fall ist der Punkt $\vec{0}$ sogar ein globales Extremum der Funktionen f und g .) Es gilt

$$H_f := \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } H_g := \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen H_f und H_g sind symmetrisch, weil f und g zweimal stetig differenzierbar sind. Die durch H_f und H_g definierten quadratischen Formen sind positiv definit bzw. negativ definit, d.h. $v^T H_f v > 0$ und $v^T H_g v < 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$ mit $v \neq 0$.

Obwohl $\vec{0}$ ein kritischer Punkt ist, hat die Funktion h im Punkt $\vec{0}$ weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum, denn $h(t, t) = t^2 > 0$ für alle $t \neq 0$

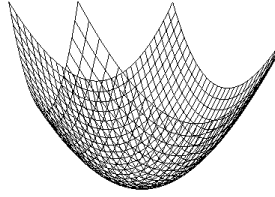


ABBILDUNG
16. Lokales
Minimum

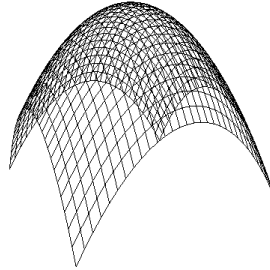


ABBILDUNG
17. Lokales
Maximum

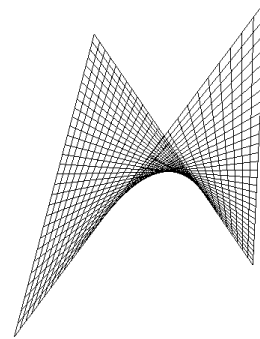


ABBILDUNG
18. Sattelpunkt

und $h(t, -t) = -t^2 < 0$ für alle $t \neq 0$. Es gilt

$$H_h := \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{yx} & h_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Auch die Matrix H_h ist symmetrisch. Die durch H_h definierte quadratische Form ist jedoch indefinit, weil die Matrix H_h den positive und negative Eigenwerte hat ($\lambda = \pm 1$). Die Abbildungen 16, 17 und 18 zeigen die Graphen der Funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = -x^2 - y^2$ und $h(x, y) = xy$ in der Nähe des kritischen Punktes $(0, 0)^T$.

Definition 27. Es seien $f \in \mathcal{C}^2(D)$ und $\vec{x}_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$. Die (n, n) -Matrix der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$H_f(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0) \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

heißt **Hesse-Matrix** der Funktion f im Punkt \vec{x}_0 .

Wenn $f \in \mathcal{C}^2(D)$, dann ist die Hesse-Matrix H_f eine symmetrische Matrix und definiert eine quadratische Form $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch $q(v) = v^T H_f v$. Der Wert $v^T H_f(\vec{x}_0) v$ ist die zweite Ableitung der Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(t) = f(\vec{x}_0 + tv)$ in $t = 0$. Wenn \vec{x}_0 ein kritischer Punkt ist, so gilt $h'(0) = 0$ und mit Hilfe dieser zweiten Ableitung $h''(0) = v^T H_f(\vec{x}_0) v$ kann man (oft) entscheiden, ob h in $t = 0$ ein lokales Extremum hat. Zur Untersuchung der Funktion f muss man nun $v^T H_f(\vec{x}_0) v$ für alle Richtungen $v \in \mathbb{R}^n$ kontrollieren können.

Definition 28. Eine symmetrische Matrix H (quadratische Form) heißt

- (1) **positiv definit**, wenn $v^T H v > 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
- (2) **negativ definit**, wenn $v^T H v < 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
- (3) **positiv semidefinit**, wenn H nicht positiv definit aber $v^T H v \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$,
- (4) **negativ semidefinit**, wenn H nicht negativ definit aber $v^T H v \leq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$,
- (5) **indefinit** sonst.

Es ist nicht möglich, alle Werte $v^T H v$ zu testen. Doch dies ist auch nicht nötig. Wir können mit Hilfe der reellen Eigenwerte oder durch Berechnung von Hauptunterdeterminanten entscheiden, ob eine symmetrische Matrix H positiv oder negativ (semi-)definit ist. Zu einer symmetrischen Matrix $H = (h_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ sei $H_m = (h_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$ die Untermatrix, die man durch Streichen der letzten $n - m$ Zeilen und Spalten erhält. Sie heißt **m -te Hauptuntermatrix**.

Satz 27. *Es sei H eine symmetrische Matrix.*

- (1) H ist positiv definit \Leftrightarrow Alle Eigenwerte von H sind positiv. \Leftrightarrow Für alle m gilt $\det H_m > 0$.
- (2) H ist negativ definit \Leftrightarrow Alle Eigenwerte von H sind negativ. \Leftrightarrow Für alle m gilt $(-1)^m (\det H_m) > 0$.
- (3) H ist positiv semidefinit und nicht positiv definit \Leftrightarrow Alle Eigenwerte von H sind nicht negativ und mindestens ein Eigenwert ist 0. \Rightarrow Für alle m gilt $\det H_m \geq 0$ und $\det H = 0$.
- (4) H ist negativ semidefinit und nicht negativ definit \Leftrightarrow Alle Eigenwerte von H sind nicht positiv und mindestens ein Eigenwert ist 0. \Rightarrow Für alle m gilt $(-1)^m \det H_m \geq 0$ und $\det H = 0$.
- (5) H ist indefinit \Leftrightarrow Die Matrix H hat positive und negative Eigenwerte

Satz 28 (Hinreichendes Kriterium für ein lokales Extremum). *Es seien $f \in C^2(D)$ und $\vec{x}_0 \in D$ ein kritischer Punkt. Ist die Hesse-Matrix $H_f(\vec{x}_0)$ von f im Punkt \vec{x}_0*

- (1) *positiv definit, so hat f in \vec{x}_0 ein lokales Minimum.*
- (2) *negativ definit, so hat f in \vec{x}_0 ein lokales Maximum.*
- (3) *indefinit, so hat f in \vec{x}_0 kein lokales Extremum, sondern einen Sattelpunkt.*

Beweis. Mit Hilfe der Taylorformel kann man $f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)$ für \vec{x} in einer kleinen Umgebung von \vec{x}_0 abschätzen. □

Bemerkung 17. Ist die Hessematrix in einem kritischen Punkt nur semidefinit, so kann man ohne weitere Untersuchung der Funktion nicht entscheiden, ob sie ein lokales Extremum in diesem Punkt hat oder nicht.

Beispiel 74 (Semidefinite Hesse-Matrix). Wir betrachten die Funktionen $f, g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2$, $g(x, y) = x^2 + y^3$ und $h(x, y) = x^2 + y^4$. Es gilt $Df = (2x, 0)$, $Dg = (2x, 3y^2)$ und $Dh = (2x, 4y^3)$. Also ist $\vec{0}$ der einzige kritische Punkt der drei Funktionen f, g und h . Wir berechnen die Hesse-Matrizen:

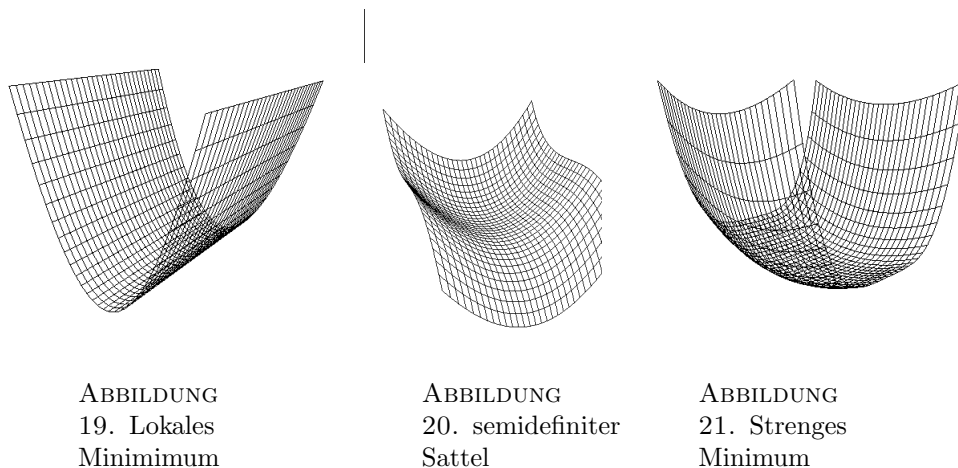
$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H_g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}, H_h = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

Da

$$H_f(\vec{0}) = H_g(\vec{0}) = H_h(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ist die Hesse-Matrix der Funktionen f, g und h in $\vec{0}$ positiv semidefinit. Sie hat die Eigenwerte 2 und 0.

Die Funktion f hat in $\vec{0}$ ein lokales Minimum, das allerdings kein strenges lokales Maximum ist, da $f(0, y) = f(0, 0) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Die Funktion g hat im kritischen Punkt $\vec{0}$ kein Extremum sondern einen Sattelpunkt, denn $f(0, y) = y^3$ und y^3 hat in $y = 0$ kein Extremum. Die Funktion h hat im kritischen Punkt $\vec{0}$ ein strenges (globales) Minimum, denn $f(x, y) = x^2 + y^4 \geq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $x^2 + y^4 = 0$ genau dann, wenn $x = y = 0$. Die Abbildungen 19, 20 und 21 zeigen



die Graphen der Funktionen $f(x, y) = x^2$, $g(x, y) = x^2 + y^3$ und $h(x, y) = x^2 + y^4$ in der Nähe des kritischen Punktes $(0, 0)^T$.

Beispiel 75 (Mehrere kritische Punkte, Sattelpunkte und lokales Maximum). Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = xy(6 - x - y)$. Als Polynom ist $f \in \mathcal{C}^2$. Es gilt $Df = (y(6 - x - y) - xy, x(6 - x - y) - xy)$. Ein kritischer Punkt (x, y) erfüllt die Gleichungen $xy = y(6 - x - y)$ und $xy = x(6 - x - y)$. Falls $y = 0$, so ist die erste Gleichung erfüllt und die zweite wird zu $0 = x(6 - x)$. Also sind $P_1 = (0, 0)^T$ und $P_2 = (6, 0)^T$ kritische Punkte. Falls $y \neq 0$, so erhält man aus der ersten Gleichung $y = 6 - 2x$ und dann aus der zweiten $x^2 = x(6 - 2x)$, also $x = 0$ oder $x = 2$. Damit sind auch $P_3 = (0, 6)^T$ und $P_4 = (2, 2)^T$ kritische Punkte.

Wir berechnen die Hessematrix:

$$H_f = \begin{pmatrix} -2y & 6 - 2x - 2y \\ 6 - 2x - 2y & -2x \end{pmatrix},$$

und

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, \text{ indefinit, denn Eigenwerte } \pm 6$$

$$H_f(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}, \text{ indefinit, denn Eigenwerte } -6 \pm 6\sqrt{2}$$

$$H_f(P_3) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}, \text{ indefinit, denn Eigenwerte } -6 \pm 6\sqrt{2}$$

$$H_f(P_4) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \text{ negativ definit, denn } \det H_1 = -4 \text{ und } \det H_2 = 12.$$

Nur im kritischen Punkt P_4 hat f ein lokales Extremum. Die Funktion f hat im Punkt ein strenges lokales Maximum mit $f(P_4) = 8$.

Beispiel 76 (Funktion von drei Veränderlichen). Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = x^2 + xz + yz$. Als Polynom ist $f \in \mathcal{C}^2$. Es gilt $Df = (2x + z, z, x + y) = 0$ genau dann, wenn $z = 0$, $x = 0$ und $y = 0$. Das bedeutet, dass

$\vec{0}$ der einzige kritische Punkt von f ist. Wir berechnen die Hesse-Matrix:

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_f(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =: H.$$

Da $\det H_1 = 2 > 0$, $\det H_2 = 0 \geq 0$ und $\det H_3 = \det H = -2 \not\geq 0$, ist H weder positiv noch negativ (semi-)definit. Also ist H indefinit. Deshalb hat f in $\vec{0}$ kein lokales Extremum.

3.9.2. Globale Extremwerte. Nur wenn \vec{x} ein innerer Punkt des Definitionsbereiches D einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist, folgt aus der Tatsache, dass \vec{x} eine Extremstelle ist auch $(Df)_{\vec{x}} = 0$. Das bedeutet, dass zum Beispiel Extremstellen im Rand des Definitionsbereiches D im Allgemeinen keine kritischen Punkte sind und durch die Methoden des Abschnitts 3.9.1 nicht entdeckt werden. Zur Bestimmung der globalen Extremwerte einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ muss man also noch das Verhalten dieser Funktion auf dem Rand von D genauer untersuchen. Diese zusätzliche Arbeit trat auch bei Extremwertuntersuchungen von Funktionen einer Variablen auf.

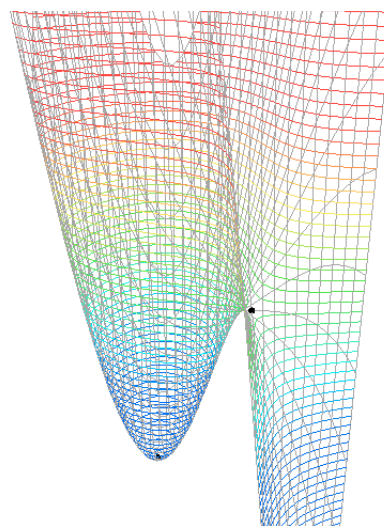


ABBILDUNG 22. Lokales Minimum jedoch keine globalen Extrema

Aber selbst wenn D keine Randpunkte hat, z.B. wenn $D = \mathbb{R}^n$, dann erfordert es weitere Argumente, um aus der Kenntnis der lokalen Extremstellen und -werte die globalen Extrema einer Funktion zu bestimmen. Der Grund dafür ist, dass zwar für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aus $f(x_0) = f(x_1)$ folgt, dass zwischen x_0 und x_1 eine lokale Extremstelle liegt, dies aber für Funktionen von mehr als einer Veränderlichen nicht mehr gilt. Dort folgt aus $f(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_1)$ nur, dass es auf der Strecke $\{\vec{x}_0 + t(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) : t \in [0, 1]\}$ einen Punkt gibt, in dem eine Richtungsableitung verschwindet.

Beispiel 77 (Funktion ist beschränkt). Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = \cos(x + y)e^{-z^2}$. Es gilt

$$Df = (-\sin(x + y)e^{-z^2}, -\sin(x + y)e^{-z^2}, -2z \cos(x + y)e^{-z^2}).$$

Da $e^{-z^2} > 0$, ist $(x, y, z)^T$ genau dann ein kritischer Punkt, wenn $\sin(x + y) = 0$ und $z = 0$. Wir berechnen die Hesse-Matrix

$$H_f = \begin{pmatrix} -\cos(x + y)e^{-z^2} & -\cos(x + y)e^{-z^2} & 2z \sin(x + y)e^{-z^2} \\ -\cos(x + y)e^{-z^2} & -\cos(x + y)e^{-z^2} & 2z \sin(x + y)e^{-z^2} \\ 2z \sin(x + y)e^{-z^2} & 2z \sin(x + y)e^{-z^2} & (4z^2 - 2) \cos(x + y)e^{-z^2} \end{pmatrix}$$

und werten sie in den kritischen Punkten $(x, k\pi - x, 0)^T$ mit $k \in \mathbb{Z}$ aus

$$H_f(x, k\pi - x, 0) = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & (-1)^{k+1} & 0 \\ (-1)^{k+1} & (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2(-1)^k \end{pmatrix} =: H.$$

Da $H_1 = (-1)^{k+1}$ und $H_2 = H_3 = 0$, ist H negativ semidefinit für gerade k und positiv semidefinit für ungerade k . Es gilt $f(x, k\pi - x, 0) = (-1)^k$. Wegen $0 < e^{-z^2} \leq 0$ und $-1 \leq \cos(x+y) \leq 1$ ist auch f beschränkt $-1 \leq f(x, y, z) \leq 1$. Da diese obere bzw. untere Schranke in den kritischen Punkten als Funktionswert angenommen wird, hat f in $(x, 2m\pi - x, 0)^T$ ein globales Maximum und in $(x, (2m+1)\pi - x, 0)^T$ ein globales Minimum für alle $x \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{Z}$.

Beispiel 78 (Konvexe und konkave Funktionen). Wenn eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ in \vec{x}_0 ein lokales Minimum hat und die Hesse-Matrix H_f in allen Punkten $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ positiv definit ist, dann ist dieses lokale Minimum auch ein globales Minimum, denn wenn $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_0)$ für ein $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_0$, dann hat die Funktion $h = f \circ \vec{c}$ mit $\vec{c}(t) = \vec{x}_0 + t(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)$ nach dem Mittelwertsatz ein lokales Maximum in $t_0 \in [0, 1]$. Es gilt aber

$$\begin{aligned} h''(t) &= \left(\sum_{j=1}^n f_{x_j}(\vec{c}(t)) c'_j(t) \right)' = \sum_{i,j=1}^n f_{x_j x_i}(\vec{c}(t)) c'_i(t) c'_j(t) + f_{x_j}(\vec{c}(t)) c''_j(t) \\ &= (D\vec{c}_t)^T H_f(\vec{c}(t)) D\vec{c}_t, \end{aligned}$$

da \vec{c} eine Gerade ist, also $c''_j(t) = 0$ für alle j . Aber $h''(t_0) \leq 0$ und H_f positiv definit widersprechen sich.

Analog gilt, wenn eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ in \vec{x}_0 ein lokales Maximum hat und die Hesse-Matrix H_f in allen Punkten $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ negativ definit ist, dann ist dieses lokale Maximum auch ein globales Maximum,

Beispiel 79 (Keine globalen Extremwerte). Wir betrachten die Funktion $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = (x+y)^3 - 12xy$. Es gilt $Df = (3(x+y)^2 - 12y, 3(x+y)^2 - 12x)$. Aus $3(x+y)^2 - 12y = 0$ und $3(x+y)^2 - 12x = 0$ folgt $x = y$ und dann $12x(x-1) = 0$. Also hat f zwei kritische Punkte $(0, 0)^T$ und $(1, 1)^T$. Wir berechnen die Hesse-Matrix

$$H_f = \begin{pmatrix} 6(x+y) & 6(x+y) - 12 \\ 6(x+y) - 12 & 6(x+y) \end{pmatrix}$$

und werten sie in den kritischen Punkten aus

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Da $\det H_f(0, 0) < 0$ ist $H_f(0, 0)$ indefinit und der kritische Punkt $(0, 0)^T$ ist keine lokale Extremstelle von f . Die Matrix $H_f(1, 1)$ hat den doppelten positiven Eigenwert 12 und ist deshalb positiv definit. Darum hat f in $(1, 1)^T$ ein lokales Minimum. Jedoch hat die Funktion f weder ein globales Minimum noch ein globales Maximum, denn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, 0) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, 0) = -\infty.$$

Abbildung 22 zeigt die Höhenlinien und die x, y -Koordinatenlinien der Funktion $f(x, y) = (x+y)^3 - 12xy$.

3.9.3. *Extrema unter Nebenbedingungen.* Manchmal ist es notwendig, bei der Bestimmung der Extremwerte einer Funktion f nur solche Argumente \vec{x} zu betrachten, die zusätzliche Bedingungen erfüllen. Solche Bedingungen können durch Ungleichungen oder Gleichungen gegeben sind.

Zum Beispiel beschreibt

$$K := \{(x, y)^T : r^2 \leq (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2\}$$

die Menge aller Punkte im \mathbb{R}^2 , deren Abstand vom Punkt $(a, b)^T$ mindestens r aber höchstens R ist (Kreissring). Die Menge K besitzt eine Teilmenge K° , die nur aus inneren Punkten besteht, $K^\circ = \{r^2 < (x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2\}$. Sie heißt Inneres von K . Dort können wir nach kritischen Punkten suchen. Das Komplement $K \setminus K^\circ$ ist der Rand $\partial K = \{r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2\} \cup \{R^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2\}$, der durch Gleichungen beschrieben wird und gesondert betrachtet werden muss.

Sind die zusätzlichen Bedingungen für die Argumente \vec{x} einer zu optimierenden Funktion f als durch Gleichungen gegeben, so suchen wir die Extremwerte der Funktion f unter der Nebenbedingung $\vec{x} \in M := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{g}(\vec{x}) = \vec{0}\}$ für eine Funktion $\vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Ist \vec{g} stetig, so ist die Teilmenge M abgeschlossen in \mathbb{R}^n . In vielen Fällen ist M sogar eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^n , also eine kompakte Menge.

Satz 29 (Existenz von Extremwerten auf kompakten Mengen). *Wenn $f \in \mathcal{C}(M)$ und M kompakt, dann hat f auf M ein globales Minimum und ein globales Maximum.*

Beispiel 80 (Kreisscheibe, Kreis, Quadrat). Wir wollen die Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + y^4$ auf folgenden Teilmengen des $D_1, D_2, D_3 \subset \mathbb{R}^2$ bestimmen:

$$D_1 = \{x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad D_2 = \{x^2 + y^2 = 1\}, \quad D_3 = \{(x, y)^T : -1 \leq x, y \leq 1\}$$

Die drei Mengen D_1, D_2 und D_3 sind kompakt. Die Funktion f hat in $\vec{0}$ ein lokales Minimum, das für f auf D_1 und auf D_3 auch ein globales Minimum ist. Weitere lokale Extremstellen hat f auf \mathbb{R}^2 nicht.

Wir wollen f auf $\partial D_1 = D_2$ untersuchen. Glücklicherweise können wir D_2 als Spur einer Kurve schreiben, also parametrisieren, $D_2 = \{(\cos \phi, \sin \phi)^T : \phi \in [0, 2\pi]\}$ und statt f auf D_2 untersuchen wir die Funktion $h : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(\phi) = f(\cos \phi, \sin \phi) = \cos^2 \phi + \sin^4 \phi$. Die erste Ableitung

$$\begin{aligned} h'(\phi) &= -2 \sin \phi \cos \phi + 4 \sin^3 \phi \cos \phi = 2 \sin \phi \cos \phi (2 \sin^2 \phi - 1) \\ &= -\sin(2\phi) \cos(2\phi) = -\sin(4\phi)/2 \end{aligned}$$

hat die Nullstellen $\phi = k\pi/4$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Für die zweite Ableitung $h''(\phi) = -2 \cos(4\phi)$ gilt $h''(k\pi/4) = -2 \cos(k\pi) = 2(-1)^{k+1}$. Also hat f auf D_2 in den Punkten $P_k := (\cos(k\pi/4), \sin(k\pi/4))^T$ für gerades k ein lokales Maximum und für ungerades k ein lokales Minimum. Es gilt

$$f(P_k) = \begin{cases} 1 & k = 0, 4 \\ \left(\frac{\pm\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pm\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{3}{4} & k = 1, 3, 5, 7 \\ 1 & k = 2, 6 \end{cases}$$

Daraus folgt, dass 1 das globale Maximum von f auf D_1 und D_2 ist. Es wird in den vier Punkten P_0, P_4, P_2 und P_6 angenommen. Die Funktion f hat auf D_2 das globale Minimum $3/4$. Es wird in den vier Punkten P_1, P_3, P_5 und P_7 angenommen.

Der Rand der Menge D_3 ist enthalten in $\{(x, y)^T : (x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0\}$. Diese Gleichung läßt sich lokal leicht nach einer der beiden Variablen auflösen. Es gilt

$$\partial D_3 = \{(1, y)^T\} \cup \{(-1, y)^T\} \cup \{(x, 1)^T\} \cup \{(x, -1)^T\} \subset D_3.$$

Nun müssen wir die Extremwerte der Funktionen $h_1(t) = f(1, t) = 1 + t^4$, $h_{-1}(t) = f(-1, t) = 1 + t^4$, $g_1(t) = f(t, 1) = t^2 + 1$ und $g_{-1}(t) = f(t, -1) = t^2 + 1$ für $t \in [-1, 1]$ bestimmen. Wir sehen direkt, dass diese Funktionen ihr Minimum für $t = 0$ und ihr Maximum in den Randpunkten, also für $t = \pm 1$ annehmen. Es gilt $f(\pm 1, 0) = f(0, \pm 1) = 1$ und $f(\pm 1, \pm 1) = 2$. Die Minima von f auf dem Rand sind größer als das lokale Minimum in $\vec{0}$. Daraus folgern wir, dass f nur in $\vec{0}$ ein globales Minimum hat und in den vier Eckpunkten $(\pm 1, \pm 1)^T$ des Quadrats D_3 ihr globales Maximum annimmt.

Beispiel 81 (Gradientenvergleich). Wir wollen für die Funktion $f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + y^4$ aus Beispiel 80 verstehen, wodurch sich die Extremstellen (auf dem Rand) auszeichnen. Es gilt $Df = (2x, 4y^3)$. Die Ableitung verschwindet im lokalen Minimum $\vec{0}$, $Df_{\vec{0}} = (0, 0)$. Der Rand von D_1 wird durch eine Gleichung definiert $\partial D_1 = \{(x, y)^T : x^2 + y^2 = 1\}$, ist also Nullstellenmenge der Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Es gilt $Dg = (2x, 2y)$. Der Gradient $(2x, 2y)^T$ steht senkrecht auf der Höhenlinie ∂D_1 . Wir wollen die Funktion f aber nur auf dieser Höhenlinie ∂D_1 betrachten. Ein lokales Extremum von f auf ∂D_1 sollte vorliegen, wenn der Gradient von f in alle Richtungen tangential zur Höhenlinie verschwindet, also nur Anteile in Richtung $\text{grad } g$ hat.

Es gilt $\text{grad } f = \lambda \text{grad } g$ genau dann, wenn $\lambda = 1$ und $y(2y^2 - 1) = 0$ oder $x = 0$. Diese Eigenschaft haben genau acht Punkte in ∂D_1 , nämlich $(0, \pm 1)^T$, $(\pm 1, 0)^T$, $(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2)^T$.

Satz 30 (Multiplikatorenregel von Lagrange). *Seien $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\vec{g} = (g_1, \dots, g_m)^T$ stetig differenzierbar und $M := \{\vec{x} : \vec{g}(\vec{x}) = \vec{0}\}$. Wenn $\vec{x}_0 \in M$ lokales Extremum von f auf M ist und die (m, n) -Matrix $(D\vec{g})_{\vec{x}_0}$ Rang m hat, dann existiert $\lambda \in \mathbb{R}^m$ mit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ und*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Beweis. Die Bedingung $\text{rang } D\vec{g} = m$ erlaubt es, die Gleichung $\vec{g}(\vec{x}) = \vec{0}$ lokal nach m der n Variablen aufzulösen. Wir erhalten eine Auflösungsfunktion \vec{h} und eine lokale Beschreibung der Menge M als $\{(\vec{\xi}, \vec{h}(\vec{\xi}))^T\}$. Nun hat die Funktion $f(\vec{\xi}, \vec{h}(\vec{\xi}))$ ein lokales Extremum für $\vec{\xi}_0$ mit $(\vec{\xi}_0, \vec{h}(\vec{\xi}_0)) = \vec{x}_0$ und die Existenz der Lagrange-Multiplikatoren λ_i folgt aus der Kettenregel. \square

Beispiel 82 (Quader minimaler Oberfläche und vorgegebenem Volumen). Ein Quader mit den Seitenlängen x, y, z hat das Volumen $V = xyz$ und die Oberfläche $f(x, y, z) = 2(xy + xz + yz)$. Es sei $V > 0$ ein vorgegebenes Volumen. Unter allen Quadern mit dem Volumen V suchen wir den mit der kleinsten Oberfläche. D.h. wir suchen das Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = xyz - V = 0$.

Da $V > 0$ ist, können wir die Nebenbedingung nach z umstellen, $z = V/(xy)$ und müssen nun das Minimum der Funktion

$$h(x, y) = f(x, y, V/(xy)) = 2(xy + V/y + V/x)$$

auf der offenen Menge $\{(x, y)^T : x, y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ bestimmen. Es gilt

$$Dh = (2y - 2V/x^2, 2x - 2V/y^2).$$

Aus $yx^2 = V = xy^2$ folgt $x = y$, da $x, y > 0$. Die Funktion h hat einen kritischen Punkt mit $x = y = V^{1/3}$. Die Hesse-Matrix von h ist

$$H_h = \begin{pmatrix} 4V/x^3 & 2 \\ 2 & 4V/y^3 \end{pmatrix}, \quad H_h(V^{1/3}, V^{1/3}) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

im kritischen Punkt positiv definit. Also hat h dort ein lokales Minimum.

Nun wollen wir die Multiplikatorenregel von Lagrange verwenden. Es gilt $dg = (yz, xz, xy) \neq (0, 0, 0)$, da $x, y, z > 0$. Die Gleichung $df + \lambda dg = 0$ wird mit $df = (2(y+z), 2(x+z), 2(x+y))$ zu

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &= (2(y+z), 2(x+z), 2(x+y)) + \lambda(yz, xz, xy) \\ &= (2(y+z) + \lambda yz, 2(x+z) + \lambda xz, 2(x+y) + \lambda xy), \end{aligned}$$

also

$$\lambda = -2 \frac{y+z}{yz} = -2 \frac{x+z}{xz} = -2 \frac{x+y}{xy}$$

und durch Multiplikation mit xyz auch $xy+xz = xy+yz = xz+yz$. Wegen $x, y, z > 0$ erhalten wir die Bedingung $x = y = z$ und $x^3 = V$ aus der Nebenbedingung. Es gilt $f(x, x, x) = 6x^2$, also $f(x, x, x) = 6V^{2/3}$ im kritischen Punkt mit $x = V^{1/3}$. Dieser kritische Punkt ist ein Minimum, da $f(x, y, z) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow 0$ oder $y \rightarrow 0$ oder $z \rightarrow 0$.

Beispiel 83 (Entfernung zu einem Punkt). Wir suchen den Punkt auf der Ellipse $\{(x, y)^T : (x-2)^2 + 4y^2 = 16\}$, der am dichtesten am Ursprung $\vec{0}$ liegt. Wir müssen die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = (x-2)^2 + 4y^2 - 16 = 0$ minimieren.

Die Nebenbedingung beschreibt eine kompakte Menge. Da die Funktion g stetig ist, ist ihre Nullstellenmenge abgeschlossen. Außerdem ist diese Menge beschränkt, weil $|x-2| \leq 4$ und $|y| \leq 2$. Also nimmt f auf der durch die Nebenbedingung definierten Menge ihre globalen Extremwerte an. Weiterhin gilt $Dg = (2(x-2), 8y) = (0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0$, aber $g(0, 0) \neq 0$.

Da $Df + \lambda Dg = (2x + \lambda 2(x-2), 2y + \lambda 8y)$ suchen wir Lösungen des Gleichungssystems $x = \lambda(2-x)$, $y(1+4\lambda) = 0$ und $g(x, y) = 0$. Aus der zweiten Gleichung folgt $y = 0$ oder $\lambda = -1/4$.

- Wenn $y = 0$, so folgt aus $g(x, 0) = 0$ sofort $x = 2 \pm 4$, also $x = 6$ oder $x = -2$, und dann $\lambda = -3/2$ oder $\lambda = -1/2$. Es gilt $f(-2, 0) = 4$ und $f(6, 0) = 36$.
- Wenn $\lambda = -1/4$, dann $-4x = 2 - x$, also $x = -2/3$ und aus $g(-2/3, y) = 0$ folgt $y^2 = (16 - 8^2/3^2)/4 = (4 - 16/9) = 20/9$, also $y = \pm 2\sqrt{5}/3$. Es gilt $f(-2/3, \pm 2\sqrt{5}/3) = (4 + 20)/9 = 8/3 < 4$.

Den kleinsten Abstand zum Nullpunkt haben die beiden Punkte $(-2/3, \pm 2\sqrt{5}/3)^T$ auf der Ellipse. Dieser Abstand beträgt $2\sqrt{6}/3$.

Beispiel 84 (Entfernung zu einer Geraden). Wir wollen den kleinsten Abstand zwischen Punkten auf der Geraden $x + y = 4$ und der Ellipse $x^2 + 4y^2 = 4$ bestimmen. Das bedeutet, dass wir das Minimum der Funktion $f(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ unter den Nebenbedingungen $\vec{g}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \vec{0}$ mit $\vec{g} = (g_1, g_2)^T$, $g_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = x_1 + y_1 - 4$ und $g_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = x_2^2 + 4y_2^2 - 4$ suchen müssen. Hier ist die durch die Nebenbedingung beschriebene Fläche nicht kompakt, aber

$$D\vec{g} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_2 & 8y_2 \end{pmatrix}$$

hat maximalen Rang, weil $g_2(x_1, y_1, 0, 0) \neq 0$, also der Punkt $(0, 0)^T$ nicht auf der Ellipse liegt. Es gilt

$$\begin{aligned} & Df + \lambda_1 Dg_1 + \lambda_2 Dg_2 \\ &= (2(x_1 - x_2) + \lambda_1, 2(y_1 - y_2) + \lambda_1, -2(x_1 - x_2) + 2\lambda_2 x_2, -2(y_1 - y_2) + 8\lambda_2 y_2). \end{aligned}$$

Wir suchen Lösungen des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 0 &= 2(x_1 - x_2) + \lambda_1 \\ 0 &= 2(y_1 - y_2) + \lambda_1 \\ 0 &= -2(x_1 - x_2) + 2\lambda_2 x_2 \\ 0 &= -2(y_1 - y_2) + 8\lambda_2 y_2 \\ 0 &= x_1 + y_1 - 4 \\ 0 &= x_2^2 + 4y_2^2 - 4 \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $\lambda_1 = -2(x_1 - x_2)$ und $x_1 - x_2 = y_1 - y_2$. Dann folgt aus der dritten und der vierten Gleichung $x_1 = x_2 + \lambda_2 x_2$, $y_1 = y_2 + 4\lambda_2 y_2$ und $0 = \lambda_2(4y_2 - x_2)$, also $\lambda_2 = 0$ oder $4y_2 = x_2$.

- Wenn $\lambda_2 = 0$, dann folgt $x_1 = x_2$, $\lambda_1 = 0$, $y_1 = y_2$, $y_1 = 4 - x_1$. Doch die Gerade $x + y = 4$ und die Ellipse $x^2 + 4y^2 = 4$ haben keinen Schnittpunkt.
- Wenn $4y_2 = x_2$, so folgt $20y_2^2 = 4$, also $y_2 = \pm 1/\sqrt{5}$ und

$$0 = x_1 + y_1 - 4 = x_2(1 + \lambda_2) + y_2(1 + 4\lambda_2) - 4 = 5y_2 + 8\lambda_2 y_2 - 4,$$

also $8\lambda_2 y_2 = 4 - 5y_2$. Damit folgt aus der vierten Gleichung $2(y_1 - y_2) = 4 - 5y_2$, also $y_1 = 2 - 3y_2/2 = 2 - 3/(\pm 2\sqrt{5})$ und $x_1 = 2 + 3/(\pm 2\sqrt{5})$. Es gibt zwei kritische Punkte. Es gilt

$$\begin{aligned} f(2 + 3/(2\sqrt{5}), 2 - 3/(2\sqrt{5}), 4/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}) &= 2(2 - \sqrt{5}/2)^2 \\ f(2 - 3/(2\sqrt{5}), 2 + 3/(2\sqrt{5}), -4/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}) &= 2(2 + \sqrt{5}/2)^2. \end{aligned}$$

Also sind die Punkte $(2 + 3/(2\sqrt{5}), 2 - 3/(2\sqrt{5}))^T$ auf der Geraden und $(4/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})^T$ auf der Ellipse die gesuchten Punkte mit dem geringsten Abstand.

Beispiel 85 (Alternative Eigenwertmethode). Wir bestimmen die Extremwerte der Funktion $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$ auf der Kugeloberfläche, also unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Die durch die Nebenbedingung definierte Fläche ist kompakt und dort hat Dg maximalen Rang. Da

$$Df + \lambda Dg = 2(x + y + z + \lambda x, x + y + z + \lambda y, x + y + z + \lambda z)$$

gilt $Df + \lambda Dg = 0$ genau dann, wenn $\lambda = 0$ und $x + y + z = 0$ oder $x = y = z$ und $\lambda = -3$. Im ersten Fall erhalten wir den Funktionswert $f(x, y, z) = 0$, der ein globales Minimum ist. Im zweiten Fall führt die Nebenbedingung zu $x = y = z = \pm 1/\sqrt{3}$ und $f(x, y, z) = 3$. Da die Kugeloberfläche kompakt ist, nimmt f auf ihr ein Maximum 3 und das Minimum 0 an.

Die Funktion f ist eine quadratische Form. Wir können die Extremwerte von f auf der Kugeloberfläche, also auf der Menge der Vektoren von Länge 1, mit Hilfe der Eigenwerte der quadratischen Form bestimmen. Diese sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^3 + 1 + 1 - 3(1 - \lambda) = (3 - \lambda)\lambda^2.$$

Die quadratische Form f hat den doppelten Eigenwerte 0 und den einfachen Eigenwert 3. Das Maximum der quadratischen Form auf der Menge der Vektoren der Länge 1 ist der größte Eigenwerte 3, das Minimum ist der kleinste Eigenwert 0.

4. EINFÜHRUNG IN DIE NUMERISCHE MATHEMATIK

Für viele Fragestellungen kann man zwar die Existenz einer (eindeutigen) Lösung beweisen, man hat aber keine Formel bzw. keinen endlichen Algorithmus zur Berechnung dieser Lösung zur Verfügung.

Beispiele für Probleme, die numerische behandelt werden müssen.

- Bestimmung von Nullstellen:
Ein Polynom vom Grad n in einer Variablen hat n komplexe Nullstellen. Ein Polynom ungeraden Grades mit reellen Koeffizienten hat mindestens eine reelle Nullstelle. Aber für Polynome vom Grad ≥ 5 gibt es keine allgemeine Lösungsformel. Die Untersuchung der Eigenschaften der Nullstellenmengen von Polynomen in mehreren Variablen ist Gegenstand der algebraischen Geometrie.
Die Lösung der Gleichungen $\cos x = x$, also der Nullstelle der transzendenten Funktion $\cos x - x$ kann nicht exakt bestimmt werden.
- Bestimmte Integrale stetiger Funktionen existieren, aber oft ist die Stammfunktion nicht in geschlossener Form bekannt.
- Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz beinhaltet ein leicht zu prüfendes Kriterium, das die eindeutige lokale Lösung eines Anfangswertproblems sichert. Der Satz ist aber nicht konstruktiv, die Lösung des Anfangswertproblems wird i.A. numerisch konstruiert.
- Diskretisierung

Fragestellungen der Numerik. Für ein Verfahren zur näherungsweise Bestimmung einer Lösung fragen wir ob und wie schnell dieses Verfahren konvergiert. Außerdem möchten wir den Fehler zwischen exakter und Näherungslösung abschätzen.

Rechengenauigkeit. Selbst wenn man einen exakten Algorithmus anwenden kann, so ergeben sich Rechenfehler durch die Unmöglichkeit die Dezimaldarstellung reeller Zahlen oder auch sehr kleine oder sehr große rationale Zahlen korrekt abzuspeichern. Hier besteht die Aufgabe darin, die Probleme so zu stellen, dass ihre numerische Behandlung stabil ist.

4.1. Fixpunktverfahren. Viele theoretische und numerische Probleme lassen sich in die Frage nach der Existenz und Bestimmung Fixpunkten umformulieren.

Definition 29. Es sei $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Ein $c \in [a, b]$ heißt **Fixpunkt** von g , wenn $g(c) = c$.

Ein Fixpunkt einer Funktion g ist ein Schnittpunkt des Graphen von g mit der Winkelhalbierenden $y = x$ und Nullstelle der Funktion $f(x) := g(x) - x$. Wenn g stetig und $f(a)f(b) < 0$, d.h. $f(a)$ und $f(b)$ haben verschiedene Vorzeichen, dann hat g im Intervall $[a, b]$ mindestens einen Fixpunkt.

Definition 30. Es sei $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Wenn eine Konstante $L \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in [a, b]$, dann genügt g der **Lipschitzbedingung** und die Konstante L heißt **Lipschitzkonstante**.

Lemma 12. Wenn g der Lipschitzbedingung genügt, dann ist g stetig. Wenn g stetig differenzierbar ist, dann genügt g auf $[a, b]$ einer Lipschitzbedingung mit einer Lipschitzkonstante $L = \max_{x \in [a, b]} |g'(x)|$.

Beweis. Aus dem Mittelwertsatz folgt

$$|g(x) - g(y)| = |g(\xi)(x - y)| \leq \max_{x \in [a, b]} |g'(x)| |x - y|$$

für ein $\xi \in [a, b]$. □

Satz 31 (Fixpunktsatz). *Wenn $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ der Lipschitzbedingung mit einer Lipschitzkonstanten $L < 1$ genügt und $g([a, b]) \subset [a, b]$, dann jede rekursiv definierte Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_0 \in [a, b]$ und $x_{n+1} = g(x_n)$ gegen den einzigen Fixpunkt $c \in [a, b]$ von g und es gelten für alle $n \in \mathbb{N}$ die Fehlerabschätzungen*

$$|x_n - c| \leq \frac{L^n}{1 - L} |x_1 - x_0|, \quad |x_n - c| \leq \frac{L}{1 - L} |x_n - x_{n-1}|.$$

Beweis. Die Intervallschachtelung $g^n([a, b])$ konvergiert gegen c , denn die Länge von $g^n([a, b])$ ist kleiner als $L^n(b - a)$ und konvergiert gegen 0. □

Bemerkung 18. Die Folge $\{x_n\}$ konvergiert schneller, wenn L klein ist. Wenn die Existenz eines Fixpunktes gesichert ist, so könnte man diesen auch durch fortgesetzte Halbierung des Intervalls und Wahl des geeigneten Teilintervalls (mit unterschiedlichen Vorzeichen der Funktionswerte an den Intervallenden) finden. Dies entspräche $L = 1/2$.

Beispiel 86. Wir suchen die Fixpunkte der Funktion $g(x) = 2 \ln(1 + x)$. Es gilt $g(0) = 2 \ln 1 = 0$. Also ist $c = 0$ ein Fixpunkt von g . Weiterhin ist $g(e - 1) = 2 \ln e = 2 > e - 1$ und $g(e^2 - 1) = 2 \ln e^2 = 4 < e^2 - 1$. Also existiert ein Fixpunkt von g im Intervall $[e - 1, e^2 - 1]$. Wir betrachten $f(x) = g(x) - x$. Es gilt

$$f'(x) = g'(x) - 1 = \frac{2}{1 + x} - 1 = \frac{1 - x}{1 + x}.$$

Also $0 < f'(x) < 1$ für alle $x \geq 1$. Insbesondere ist f monoton wachsend und hat deshalb nur eine Nullstelle > 1 . Außerdem hat g auf $[e - 1, e^2 - 1]$ eine Lipschitzkonstante $L < |2/9 - 1| = 7/9$.

Wir starten die Fixpunktiteration mit $x_0 = 3$ und erhalten

$$\begin{aligned} x_1 &= g(x_0) \approx 2,7725887222 \\ x_2 &= g(x_1) \approx 2,6555228591 \\ x_3 &= g(x_2) \approx 2,5924782721 \\ x_4 &= g(x_3) \approx 2,5576845817 \\ x_5 &= g(x_4) \approx 2,5382198697 \\ x_6 &= g(x_5) \approx 2,527247478 \\ x_7 &= g(x_6) \approx 2,521035631 \\ x_8 &= g(x_7) \approx 2,5175103194 \end{aligned}$$

mit der Fehlerabschätzung

$$|c - x_8| \leq \frac{7^8 9}{9 \cdot 8^2} |x_0 - x_1| < 0,14, \quad |c - x_8| \leq \frac{7 \cdot 9}{9 \cdot 2} |x_8 - x_7| < \frac{7}{2} 0,004 = 0,014.$$

4.1.1. *Übergang zur Umkehrfunktion.* Wenn $g'(x) \geq K > 1$ für alle $x \in [a, b]$, stetig differenzierbar und $g([a, b]) \subset [a, b]$, dann existiert eine Umkehrfunktion $g^{-1} : g([a, b]) \rightarrow [a, b]$ mit

$$\max_{y \in g([a, b])} |(g^{-1})'(y)| \leq 1/K < 1, \text{ da } (g^{-1})'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)}.$$

Da $g(c) = c$ genau dann, wenn $g^{-1}(c) = c$, kann man zur Bestimmung eines Fixpunktes von g auch die Fixpunkte der Umkehrfunktion g^{-1} suchen.

Beispiel 87. Wir suchen die Fixpunkte von $g(x) = \tan x$. Es gilt $0 = \tan 0$. Die Funktion $g(x)$ hat in jedem Intervall $(k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2)$ einen Fixpunkt, weil $f(x) = \tan x - x$ auf diesem Intervall alle reellen Zahlen als Funktionswerte annimmt. Wir suchen einen Fixpunkt von g im Intervall $(\pi/2, 3\pi/2)$. Es gilt $g'(x) = 1 + \tan^2 x > 1$. Die Umkehrfunktion $\arctan y + \pi$ genügt der Lipschitzbedingung mit einer Lipschitzkonstante $L = 1/2 < 1$, denn $(\arctan y)' = 1/(1+y^2) < 1/2$ für alle $y > 1$.

Wir starten die Fixpunkteriteration mit $y_0 = 3$ und erhalten

$$\begin{aligned} y_1 &= \pi + \arctan(y_0) \approx 4,390638426 \\ y_2 &= \pi + \arctan(y_1) \approx 4,4884516449 \\ y_3 &= \pi + \arctan(y_2) \approx 4,4931752503 \\ y_4 &= \pi + \arctan(y_3) \approx 4,493398405 \\ y_5 &= \pi + \arctan(y_4) \approx 4,4934089363 \\ y_6 &= \pi + \arctan(y_5) \approx 4,4934094333 \\ y_7 &= \pi + \arctan(y_6) \approx 4,4934094567 \\ y_8 &= \pi + \arctan(y_7) \approx 4,4934094579. \end{aligned}$$

4.1.2. *Nullstellenberechnung.* Die Berechnung von Nullstellen einer Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ läßt sich auf die Bestimmung von Fixpunkten zurückführen, z.B.

- $f(c) = 0$ genau dann, wenn c Fixpunkt von $g(x) = x \pm f(x)$. Hier wählt man das Vorzeichen so, dass $|g'(x)| = |1 \pm f'(x)| < 1$.
- Wenn $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ dann ist $f(c) = 0$ genau dann, wenn c ein Fixpunkt von $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Die so definierte Iteration $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_0 \in [a, b]$ und

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

heißt Newton-Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen.

Da beim Newtonverfahren

$$g'(x) = 1 - 1 + \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2},$$

gilt

Satz 32 (Konvergenzkriterium für das Newton-Verfahren). *Wenn $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und*

$$L := \max_{x \in [a, b]} \left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| < 1,$$

dann konvergiert die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_0 \in [a, b]$ und $x_{n+1} = g(x_n)$ gegen die einzige Nullstelle c von f in $[a, b]$, falls $x_n \in [a, b]$ für alle n . Es gelten die Fehlerabschätzungen

$$|c - x_n| \leq \frac{L}{1 - L} |x_n - x_{n-1}|, \quad |c - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{\min_{x \in [a, b]} |f'(x)|}.$$

Beispiel 88 (Berechnung von \sqrt{a}). Die reelle Zahl \sqrt{a} ist die positive Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 - a$. Wir wollen $a = 1/2$ betrachten, also $\sqrt{1/2}$ berechnen. Es gilt $1/2 < \sqrt{1/2} < 5/7$. Da $1 - f'(x) = 1 - 2x$, genügt die Funktion $g(x) = x - f(x)$ auf $[1/2, 5/7]$ der Lipschitzbedingung mit der Lipschitzkonstante $L = 3/7$. Wir starten die Fixpunktiteration mit $x_0 = 0,6$ und erhalten

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - x_0^2 + 1/2 = 0,74 \\ x_2 &= x_1 - x_1^2 + 1/2 = 0,6924 \\ x_3 &= x_2 - x_2^2 + 1/2 = 0,71298224 \\ x_4 &= x_3 - x_3^2 + 1/2 \approx 0,70463856544 \\ x_5 &= x_4 - x_4^2 + 1/2 \approx 0,70812305753 \\ x_6 &= x_5 - x_5^2 + 1/2 \approx 0,70668479292 \\ x_7 &= x_6 - x_6^2 + 1/2 \approx 0,70728139637 \\ x_8 &= x_7 - x_7^2 + 1/2 \approx 0,70703442272. \end{aligned}$$

Nun berechnen wir $\sqrt{1/2}$ mit Hilfe des Newtonverfahrens. Es gilt $f'(x) > 1$ für $x \geq 1$. Wir starten auch das Newtonverfahren wieder mit $x_0 = 0,6$ und erhalten

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \approx 0,71666666667 \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 0,70717054264 \\ x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approx 0,70710678406 \\ x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \approx 0,70710678119. \end{aligned}$$

Das Newtonverfahren konvergiert hier sehr schnell.

4.1.3. *Mehrdimensionales Newtonverfahren.* Wenn $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dann führt die Approximation

$$\vec{f}(\vec{x}_{n+1}) - \vec{f}(\vec{x}_n) \approx (D\vec{f})_{\vec{x}_n}(\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_n)$$

in der Nähe einer Nullstelle, also $\vec{f}(\vec{x}_{n+1}) \approx \vec{0}$, zu der Iteration

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - (D\vec{f})_{\vec{x}_n}^{-1} \vec{f}(\vec{x}_n) \text{ bzw. } -\vec{f}(\vec{x}_n) = (D\vec{f})_{\vec{x}_n}(\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_n)$$

als lineares Gleichungssystem für \vec{x}_{n+1} . Um dieses Iterationsverfahren durchführen zu können, muss $D\vec{f}$ invertierbar sein. Wenn zusätzlich die Abbildung $\vec{g}(\vec{x}) = \vec{x} - (D\vec{f})_{\vec{x}}^{-1} \vec{f}(\vec{x})$ kontrahierend ist, dann konvergiert dieses mehrdimensionale Newtonverfahren gegen eine Nullstelle von \vec{f} .

4.2. Interpolation. Gegeben sind Stützstellen x_0, \dots, x_n und die Werte $y_j = f(x_j)$ einer Funktion f in diesen Punkten. Gesucht ist ein Polynom $p(x)$ mit $p(x_j) = y_j$ für alle $j = 0, \dots, n$, also ein Polynom durch die vorgegebenen Punkte.

Satz 33 (Existenz eines eindeutigen Interpolationspolynoms). *Es seien paarweise verschiedene $x_j \in \mathbb{R}$ und beliebige $y_j \in \mathbb{R}$ für $0 = 1, \dots, n$ gegeben. Dann existiert ein eindeutiges Polynom $p(x)$ vom Grad $\leq n$ mit $p(x_j) = y_j$ für alle j .*

Beweis. Das gesuchte Polynom ist

$$p(x) = \sum_{j=0}^n y_j \prod_{k \neq j} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

□

Beispiel 89 (Lineare Funktion). Für $x_0 \neq x_1 \in \mathbb{R}$ und $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine Gerade durch die Punkte $(x_0, y_0)^T$ und $(x_1, y_1)^T$. Dies ist der Graph des Polynoms

$$\begin{aligned} p(x) &= y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{-y_0 x + y_0 x_1 + y_1 x - y_1 x_0}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x + \frac{y_0 x_1 - y_1 x_0}{x_1 - x_0}. \end{aligned}$$

Satz 34 (Fehlerabschätzung). *Es sei $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ und p das Interpolationspolynom von f zu den Stützstellen $x_0 < \dots < x_n$. Dann gilt*

$$\|f - p\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| \max_{x \in [a, b]} |q(x)|$$

mit $q(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$.

Beweis. Für $x \in [a, b]$ und $x \neq x_j$ für alle j hat die Funktion

$$F(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{q(x)} q(t)$$

mindestens $n+2$ Nullstellen. Daraus folgt durch wiederholte Anwendung des Satzes von Rolle, dass $F^{(n+1)}$ im Intervall $[a, b]$ mindestens eine Nullstelle hat. Es existiert also ein $\xi \in [a, b]$ mit $F^{(n+1)}(\xi) = 0$. Da p ein Polynom vom Grad n ist, gilt $p^{(n+1)} \equiv 0$. Das Polynom q hat Grad $n+1$ und der führende Koeffizient ist 1, deshalb gilt $q^{(n+1)} \equiv (n+1)!$. Wir erhalten die Gleichung

$$0 = F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x) - p(x)}{q(x)} (n+1)!$$

und damit die Abschätzung

$$|f(x) - p(x)| = \frac{|q(x)|}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| \max_{x \in [a, b]} |q(x)|.$$

□

Bemerkung 19. Der Faktor $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ in der Abschätzung des Interpolationsfehlers hängt nur von der zu interpolierenden Funktion f ab. Der zweite Faktor $\|q\|_\infty$ kann durch geeignete Wahl der Stützstellen x_j klein gehalten werden

Satz 35 (Berechnung des Interpolationspolynoms). *Es seien paarweise verschiedene $x_j \in \mathbb{R}$ und beliebige $y_j \in \mathbb{R}$ für $j = 0, \dots, n$ gegeben. Dann existieren $B_j \in \mathbb{R}$, so dass*

$$\sum_{j=0}^n B_j \prod_{k=0}^{j-1} (x-x_k) = B_0 + B_1(x-x_0) + B_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + B_n(x-x_0) \dots (x-x_{n-1})$$

das eindeutige Polynom $p(x)$ vom Grad $\leq n$ mit $p(x_j) = y_j$ für alle j ist.

Beweis. Die Gleichungen $\sum_{j=0}^n B_j \prod_{k=0}^{j-1} (x_i - x_k) = y_i$ können nach B_i aufgelöst werden □

Beispiel 90. Wir betrachten die Stützstellen $x_j = j$ mit $j = 0, 1, 2$ und die Werte $y_0 = y_2 = 1$ und $y_1 = 0$. Dann ist

$$1 = y_0 = p(x_0) = p(0) = B_0,$$

$$0 = y_1 = p(x_1) = B_0 + B_1(x_1 - x_0) = 1 + B_1, \quad B_1 = -1,$$

$$1 = y_2 = p(x_2) = B_0 + B_1(x_2 - x_0) + B_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = 1 - 2 + B_2 \cdot 2, \quad B_2 = 1$$

und das Interpolationspolynom p ist

$$p(x) = 1 - (x - x_0) + (x - x_0)(x - x_1) = 1 - x + x(x - 1) = (x - 1)^2.$$

Diese Formel für das Interpolationspolynom läßt sich leicht anpassen, wenn man nicht nur die Funktionswerte an den Stützstellen x_j vorgibt, sondern auch die Ableitungen bis zur Ordnung m_j .

Satz 36 (Interpolation von Funktionswerten und Ableitungen). *Es seien paarweise verschiedene $x_j \in \mathbb{R}$ und beliebige $y_j^{(l)} \in \mathbb{R}$ für $j = 0, \dots, n$ und $l = 0, \dots, m_j$ gegeben. Dann existiert ein eindeutiges Polynom p vom Grad $\leq n + \sum_{j=1}^n m_j$ mit $p^{(l)}(x_j) = y_j^{(l)}$ für alle j, l . Es gilt $p(x) =$*

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{m_j} B_{j,l} \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_j)^{m_j+1} (x - x_j)^{(l)} + \sum_{l=0}^{m_n-1} B_{n,l} \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_j)^{m_j+1} (x - x_n)^{(l)}$$

und die Koeffizienten $B_{j,l}$ können durch Umstellung der Gleichung $p^{(l)}(x_j) = y_j^{(l)}$ nach $B_{j,l}$ berechnet werden.

Beispiel 91 (Kubischer Spline). Es seien $x_0 = -1, x_1 = 1, y_0^{(0)} = y_1^{(0)} = 1, y_0^{(1)} = -2$ und $y_1^{(1)} = 2$. Dann gilt

$$p(x) = B_{0,0} + B_{0,1}(x - x_0) + B_{1,0}(x - x_0)^2 + B_{1,1}(x - x_0)^2(x - x_1)$$

und die Koeffizienten $B_{j,l}$ berechnen wir

$$1 = y_0^{(0)} = p(x_0) = B_{0,0}$$

$$-2 = y_0^{(1)} = p'(x_0) = B_{0,1}$$

$$1 = y_1^{(0)} = p(x_1) = B_{0,0} + B_{0,1}(x_1 - x_0) + B_{1,0}(x_1 - x_0)^2 = 1 - 2 \cdot 2 + B_{1,0} \cdot 2^2$$

$$B_{1,0} = 1$$

$$2 = y_1^{(1)} = p'(x_1) = B_{0,1} + 2B_{1,0}(x_1 - x_0) + B_{1,1}(x_1 - x_0)^2 = -2 + 2 \cdot 2 + B_{1,1} \cdot 2^2$$

$$B_{1,1} = 0$$

und $p(x) = 1 - 2(x + 1) + (x + 1)^2 = x^2$.

Bemerkung 20. Interpoliert man nur die Funktionswerte an den Stützstellen, so treten an den Intervallenden starke Oszillation auf, wenn die Anzahl der Stützstellen groß ist. Dem kann man entgegen wirken, indem man zwischen zwei Stützstellen einen kubischen Spline verwendet und den Übergang zwischen den einzelnen Splines durch die Wahl der Ableitungen in den Stützstellen differenzierbar macht.

4.3. Numerische Integration.

4.3.1. *Numerische Integration bestimmter Integrale.* Um ein Integral einer Funktion f numerische zu berechnen, bestimmen wir das Integral einer Interpolation von f . Als direkte Folgerung aus der Fehlerabschätzung zwischen einer Funktion f und ihrem Interpolationspolynom erhalten wir

Satz 37 (Integrationsfehler). *Seien $f \in \mathcal{C}^{(n+1)}([a, b])$, $a = x_0 < \dots < x_n = b$ Stützstellen und p das Interpolationspolynom von f in diesen $n + 1$ Stützstellen. Dann gilt*

$$\left| \int_a^b f(x) - p(x) dx \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| \int_a^b |q(x)| dx$$

mit $q(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$.

Für $n = 1$ ergibt sich die **Trapezregel**, d.h.

$$\begin{aligned} p(x) &= f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \\ \int_a^b p(x) dx &= \frac{f(a) + f(b)}{2(b - a)} \\ \int_a^b |q(x)| dx &= \int_a^b (x - a)(b - x) dx = \left[\frac{(x - a)^2}{2}(b - x) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(x - a)^2}{2} dx \\ &= \left[\frac{(x - a)^3}{6} \right]_a^b = \frac{(b - a)^3}{6}, \end{aligned}$$

$$\left| \int_a^b f(x) - p(x) dx \right| \leq \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| \frac{(b - a)^3}{12}$$

Für $n = 2$ und $x_1 = (b + a)/2$ erhält man die **Simpsonformel**,

$$p(x) = f(a) + 2 \frac{f(\frac{a+b}{2}) - f(a)}{b - a}(x - a) + 2 \frac{f(b) + f(a) - 2f(\frac{a+b}{2})}{(b - a)^2}(x - a)(x - \frac{a+b}{2})$$

und

$$\int_a^b p(x) dx = \frac{b - a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

Wenn $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$, so gilt sogar die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_a^b f(x) - p(x) dx \right| \leq \frac{(b - a)^5}{2880} \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Bemerkung 21. Hier erhält man die „bessere“ Abschätzung, weil für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ das Integral $\int_a^b c(x - a)(x - \frac{a+b}{2})(x - b) dx = 0$ und f eigentlich an vier Stützstellen durch ein Polynom dritten Grades interpoliert wird.

Entscheidend für die Güte der Formel ist der Exponent von $b - a$, der Intervalllänge. Für $n > 1$ konvergiert $(b - a)^n$ schneller gegen 0 als $b - a$, leider wächst $(b - a)^n$ auch schneller als $b - a$. Folglich werden die Näherungen für große Intervalllängen immer schlechter.

Eine Lösung des Problems besteht darin, das Intervall $[a, b]$ in N Teilintervalle gleicher Länge, also $(b - a)/N$ zu zerlegen und auf diesen Teilintervallen die Trapez- oder die Simpsonformel anzuwenden. Für die **zusammengesetzte** Trapezformel $T_N(x)$ und die zusammengesetzte Simpsonformel $S_N(x)$ gelten dann die Fehlerabschätzungen

$$(9) \quad \left| \int_a^b f(x) - T_N(x) dx \right| \leq \frac{(b - a)^3}{12N^2} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$$

$$(10) \quad \left| \int_a^b f(x) - S_N(x) dx \right| \leq \frac{(b - a)^5}{2880N^4} \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Folgerung 13. Für $N \rightarrow \infty$ konvergieren $\int_a^b T_N(x) dx$ und $\int_a^b S_N(x) dx$ gegen $\int_a^b f(x) dx$.

4.3.2. *Uneigentliche Integrale.* Wenn das Integrationsintervall unbegrenzt ist, z.B. $[a, \infty)$, oder die zu integrierende Funktion f unbeschränkt ist, kann man die Trapez- oder die Simpsonformel nicht direkt anwenden.

- **Abschneidemethode:** Statt des $\int_a^\infty f(x) dx$ berechnet man $\int_a^M f(x) dx$ für ein $M > a$ näherungsweise und schätzt des Rest $\int_M^\infty f(x) dx$ ab. Dies ist sinnvoll bei Funktionen f , die für $x \rightarrow \infty$ schnell gegen 0 konvergieren, z.B. $f(x) = e^{-x}$.
- **Substitution:** Durch eine Substitution kann man ein unbeschränktes Intervall in ein beschränktes transformieren. Zum Beispiel ist $\arctan([0, \infty)) = [0, \pi/2)$ und $1/([1, \infty)) = (0, 1]$. Manchmal funktioniert nach einer Substitution auch die Abschneidemethode besser.
- **partielle Integration:** Zum Beispiel kann man durch mehrmalige partielle Integration von $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ erreichen, dass der Exponent von x im Nenner größer wird und dadurch die Abschneidemethode dann bessere Näherungen liefert, weil der Integrand für große x schneller gegen 0 konvergiert.

4.4. **Differenzenverfahren.** Ein ad hoc Methode zur numerischen Behandlung von Differentialgleichungen, d.h. Anfangswert- und Randwertproblemen, ist das Differenzenverfahren. Ersetzt man y' durch Differenzenquotienten $(y(x + h) - y(x))/h$ mit kleiner Schrittweite h , so erhält man ein lineares Gleichungssystem. Weitere Stichworte zu numerischen Lösungsverfahren von Differentialgleichungen sind explizit und implizites Euler-Verfahren, Runge-Kutta-Verfahren, Schrittweitenanpassung und Methode der finiten Elemente.

5. INTERGALRECHNUNG FÜR FUNKTIONEN MEHRERER VERÄNDERLICHER

Das Integral $\int_D f(\vec{x}) d\vec{x}$ einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ soll das Volumen der Menge $\{(\vec{x}, y)^T : \vec{x} \in D, y \in [0, f(\vec{x})]\}$ messen. Wir definieren dieses Integral erst für die einfachsten Funktionen (konstante Funktionen) und die einfachsten Definitionsbereiche (abgeschlossene Intervalle) und setzen die Definition dann in geeigneter Weise fort, so dass das Integral alle wünschenswerten Eigenschaften hat, z.B. Additivität $\int_D (f + g)(\vec{x}) d\vec{x} = \int_D f(\vec{x}) d\vec{x} + \int_D g(\vec{x}) d\vec{x}$ und $\int_D f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{D \setminus D_1} f(\vec{x}) d\vec{x} + \int_{D_1} f(\vec{x}) d\vec{x}$ für $D_1 \subset D$.

Definition 31. Es seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{a} = \sum_{j=1}^n a_j \vec{e}_j$ und $\vec{b} = \sum_{j=1}^n b_j \vec{e}_j$. Die Menge

$$[\vec{a}, \vec{b}] := \left\{ \vec{x} = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j : x_j \in [a_j, b_j] \forall j \right\}$$

heißt **abgeschlossenes Intervall** des \mathbb{R}^n . Die Zahl $\mu([\vec{a}, \vec{b}]) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$ heißt **Maß** oder **Inhalt** des Intervalls $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Ein abgeschlossenes Intervall ist eine kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^n . Das Integral einer konstanten Funktion $f \equiv c$ über einem abgeschlossenen Intervall I sollte $c\mu(I)$ sein.

Definition 32. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion**, wenn es endlich viele abgeschlossene Intervalle I_k und $c_k \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f = \sum_k c_k \chi_{I_k} \text{ mit } \chi_{I_k}(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \vec{x} \in I_k \\ 0 & \vec{x} \notin I_k \end{cases}.$$

Da Integral einer Treppenfunktion $f = \sum_k c_k \chi_{I_k}$ über einer Menge D , die die Vereinigung $\cup_k I_k$ enthält, sollte $\int_D f(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_k c_k \mu(I_k)$ sein.

Definition 33. Es sei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossenes Intervall, $D \subset I$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Wenn es eine Folge von Treppenfunktionen $f_m : I_m \rightarrow \mathbb{R}$ mit $I_m \subset I$ gibt, die gleichmäßig auf I gegen f konvergiert, dann heißt f **auf D integrierbar** und

$$\int_I f(\vec{x}) d\vec{x} := \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{I_m} f_m(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Insbesondere gilt $\int_I \sum_{m=0}^{\infty} c_m \chi_{I_m} d\vec{x} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \mu(I_m)$, wenn die Summe gleichmäßig konvergiert und $I \supset \cup_m I_m$.

5.1. Integrale über abgeschlossenen Intervallen, Satz von Fubini.

Satz 38 (Integrierbarkeit stetiger Funktionen). Es sei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossenes Intervall. Wenn $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ist f integrierbar über I .

Beweis. Als stetige Funktion auf einer kompakten Menge ist f gleichmäßig stetig. Als Treppenfunktion f_m wählt man zum Beispiel

$$\sum_{J=j_1, \dots, j_n=1}^{2^m} f(\vec{x}_J) \chi_{I_J} \text{ mit } I_J = \left[\vec{a} + \sum_k \frac{b_k - a_k}{2^m} (j_k - 1) \vec{e}_k, \vec{a} + \sum_k \frac{b_k - a_k}{2^m} j_k \vec{e}_k \right]$$

und $\vec{x}_J \in I_J$. Also $\cup_J I_J = I$ und $\mu(I_J) = \mu(I) 2^{-nm}$. \square

Beispiel 92. Die konstante Funktion $f \equiv c$ ist eine Treppenfunktion und $\int_I f(\vec{x}) d\vec{x} = c\mu(I)$.

Zu einem abgeschlossenen Intervall $I = [\vec{a}, \vec{b}]$ betrachten wir $I_k := \times_{j \neq k} [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}^{n-1}$, die Projektion auf \mathbb{R}^{n-1} , die durch Streichen der k -ten Komponente entsteht, und bezeichnen mit \vec{x}_k die Projektion des Vektors $\vec{x} \in I$ auf I_k .

Satz 39 (Zurückführung auf Integrale einer Veränderlichen). *Wenn f auf $I = [\vec{a}, \vec{b}]$ integrierbar und $\int_{a_k}^{b_k} f(\vec{x}) dx_k$ für beliebige $x_j \in [a_j, b_j]$ mit $j \neq k$ existiert, dann*

$$\int_I f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{I_k} \left(\int_{a_k}^{b_k} f(\vec{x}) dx_k \right) d\vec{x}_k.$$

Beweis. Wir wählen die Intervalle I_J so klein, dass $|f(\vec{x}_J) - f(\vec{x})| < \varepsilon \mu(I)^{-1}$ für alle $\vec{x} \in I_J$, wenn $\vec{x}_J \in I_J$. In der endlichen Summe $\sum_J c_J \mu(I_J)$ kann man umordnen und erhält die gewünschte Abschätzung. \square

Bemerkung 22. Wenn f auf I stetig ist, so ist f auf I integrierbar und kann durch iterierte Integrale berechnet werden.

Beispiel 93. Wir betrachten $I = [a, b] \times [c, d]$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = xy$. Die Funktion f ist stetig und deshalb gilt

$$\begin{aligned} \int_I f(x, y) d(x, y) &= \int_c^d \left(\int_a^b xy dx \right) dy = \int_c^d \frac{y}{2} [x^2]_{x=a}^{x=b} dy = \int_c^d \frac{b^2 - a^2}{2} y dy \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2} \frac{1}{2} [y^2]_{y=c}^{y=d} = \frac{(b^2 - a^2)(d^2 - c^2)}{4}. \end{aligned}$$

Beispiel 94. Wir betrachten $I = [0, 1] \times [a, b]$ mit $0 < a$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} x^y & , \text{ falls } x > 0 \\ 0 & , \text{ falls } x = 0 \end{cases}.$$

Die Funktion f ist stetig auf I und insbesondere in den Punkten $(0, y)^T$, weil $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} x^y = 0$, falls $y > 0$. Nun beachten wir $x^y = e^{y \ln x}$ und berechnen

$$\begin{aligned} \int_I f(x, y) d(x, y) &= \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_a^b e^{y \ln x} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{e^{y \ln x}}{\ln x} \right]_{y=a}^{y=b} dx = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_I f(x, y) d(x, y) &= \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} [x^{y+1}]_{x=0}^{x=1} dy = \int_a^b \frac{1}{1+y} dy \\ &= [\ln(1+y)]_a^b = \ln \frac{b+1}{a+1}. \end{aligned}$$

Da f stetig ist, folgern wir

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

Das Integral ist eigentlich, denn

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = 0$$

und

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{bx^{b-1} - ax^{a-1}}{1/x} = b - a.$$

Beispiel 95. Wir betrachten $f(x, y, z) = 2x + 3y^2 + z$ auf $I = [0, 1] \times [0, 1] \times [1, 2]$. Die Funktion f ist stetig und wir berechnen

$$\begin{aligned} \int_I f(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_1^2 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 2x + 3y^2 + z dx \right) dy \right) dz \\ &= \int_1^2 \left(\int_0^1 [x^2 + 3xy^2 + xz]_{x=0}^{x=1} dy \right) dz \\ &= \int_1^2 \left(\int_0^1 1 + 3y^2 + z dy \right) dz = \int_1^2 [y + y^3 + yz]_{y=0}^{y=1} dz \\ &= \int_1^2 2 + z dz \left[2z + \frac{z^2}{2} \right]_1^2 = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

5.2. Integration auf beschränkten Mengen, Eigenschaften des Integrals.

Wenn $D \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist, dann existiert ein minimales abgeschlossenes Intervall $I(D)$ mit $D \subset I(D)$. Die Funktion $\chi_D : I(D) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\chi_D(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } \vec{x} \in D \\ 0 & , \text{ falls } \vec{x} \notin D \end{cases}$$

heißt **charakteristische Funktion von D** . Zu einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\tilde{f} : I(D) \rightarrow \mathbb{R}$ die **triviale Fortsetzung** von F auf $I(D)$, also

$$\tilde{f}(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}) & , \text{ falls } \vec{x} \in D \\ 0 & , \text{ falls } \vec{x} \notin D \end{cases}.$$

Lemma 13. Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist auf D genau dann integrierbar, wenn \tilde{f} auf $I(D)$ integrierbar ist.

Satz 40 (Eigenschaften des Integrals). Es sein $D \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge, f, g integrierbar auf D , $c \in \mathbb{R}$ und $D_1 \cup D_2 = D$ mit $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ eine Zerlegung von D . Dann gilt

- **Linearität:**

$$\begin{aligned} \int_D cf(\vec{x}) d\vec{x} &= c \int_D f(\vec{x}) d\vec{x} \\ \int_D f(\vec{x}) + g(\vec{x}) d\vec{x} &= \int_D f(\vec{x}) d\vec{x} + \int_D g(\vec{x}) d\vec{x} \end{aligned}$$

- **Monotonie:** Wenn $f(\vec{x}) \leq g(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in D$, dann

$$\int_D f(\vec{x}) d\vec{x} \leq \int_D g(\vec{x}) d\vec{x}.$$

- **absolute Integrierbarkeit:** $|f|$ ist integrierbar auf D und wegen der Monotonie $|\int_D f(\vec{x}) d\vec{x}| \leq \int_D |f(\vec{x})| d\vec{x}$.
- **Integrierbarkeit von Produkten:** fg ist integrierbar.

- *Additivität: Wenn $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ und f integrierbar auf D_1 und D_2 , dann gilt*

$$\int_D f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{D_1} f(\vec{x}) d\vec{x} + \int_{D_2} f(\vec{x}) d\vec{x}.$$

5.3. Messbare Mengen.

Definition 34. Eine beschränkte Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **messbar**, wenn ihre charakteristische Funktion $\chi_D : I(D) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\chi_D(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } \vec{x} \in D \\ 0 & , \text{ falls } \vec{x} \notin D \end{cases}$$

auf $I(D)$ integrierbar ist.

Dies bedeutet, dass die konstanten Funktionen auf messbaren Mengen integrierbar sind.

Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Ein Punkt $\vec{x} \in D$ heißt **innerer Punkt**, wenn es eine Umgebung von \vec{x} gibt, die ganz in D liegt, also $U_\varepsilon = \{\vec{y} : \|\vec{x} - \vec{y}\| < \varepsilon\} \subset D$ für ein $\varepsilon > 0$. Ein Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ heißt **Randpunkt**, wenn jede offene Umgebung von \vec{x} Punkte enthält, die in D liegen, und Punkte enthält, die nicht in D liegen. Ein Punkt $\vec{x} \in D$ ist genau dann ein Randpunkt von D , wenn er kein innerer Punkt von D ist. Ein Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann Randpunkt von D , wenn es eine Folge von Punkten $\{\vec{x}_n\} \subset D$ gibt, die gegen \vec{x} konvergiert. Die Menge der inneren Punkte wird mit D° bezeichnet, die Menge der Randpunkte mit ∂D . Der Abschluß \bar{D} der Menge D ist die Vereinigung von inneren und Randpunkten $\bar{D} = D \cup \partial D$.

Satz 41 (Kriterium für Messbarkeit). Eine beschränkte Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann messbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele abgeschlossene Intervalle $I_k \subset \mathbb{R}^n$ existieren, so dass

$$\partial D \subset \cup_k I_k \text{ und } \sum_k \mu(I_k) < \varepsilon.$$

Definition 35. Eine beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Nullmenge** des \mathbb{R}^n , wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele abgeschlossene Intervalle $I_k \subset \mathbb{R}^n$ existieren, so dass $M \subset \cup_k I_k$ und $\sum_k \mu(I_k) < \varepsilon$.

Beispiel 96 (Graphen). Der Graph $\{(\vec{x}, f(\vec{x})) : \vec{x} \in D\}$ einer stetigen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt ist eine Nullmenge in \mathbb{R}^n . Zum Beispiel ein Abschnitt der Hyperebene $\{(\vec{x}, 0) : \vec{x} \in \mathbb{R}^{n-1}\} \subset \mathbb{R}^n$ oder die Oberfläche der oberen Halbkugel $\{(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}) : x, y \in [-1, 1]\} \subset \mathbb{R}^3$.

Beispiel 97 (Nullstellenmengen von Polynomen). Wenn $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ein Polynom und nicht $p \equiv 0$, dann ist $\{\vec{x} : p(\vec{x}) = 0\}$ eine Nullmenge des \mathbb{R}^n , z.B. die Kugeloberfläche $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$.

Lemma 14 (Volumen messbarer Mengen). Wenn M eine Nullmenge des \mathbb{R}^n ist, dann $\mu(M) = 0$. Wenn D eine messbare Menge ist, dann sind auch D° und ∂D messbar und $\mu(D) = \mu(D^\circ) = \mu(\bar{D})$.

Lemma 15 (Eigenschaften des Maßes). Wenn D_1, D_2 messbar, dann sind $D_1 \cap D_2$ und $D_1 \cup D_2$ messbar und es gilt $\mu(D_1 \cup D_2) = \mu(D_1) + \mu(D_2) - \mu(D_1 \cap D_2)$. Wenn D Nullmenge und $D_1 \subset D$, dann ist auch D_1 eine Nullmenge.

Satz 42 (Integrierbarkeit auf messbaren Mengen). *Wenn $D \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und messbar und $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem Abschluß von D , dann ist f auf D integrierbar und*

$$\int_D f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{D^\circ} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\bar{D}} f(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Wenn $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Funktion, $M \subset D$ eine Nullmenge und $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in D \setminus M$, dann ist auch g auf D integrierbar und $\int_D f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_D g(\vec{x}) d\vec{x}$.

5.4. Integration über Normalbereiche. Ein Beispiel für messbare Mengen sind Mengen der Form

$$M = \left\{ \vec{x} = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j : x_k \in [\phi(\vec{x}_k), \psi(\vec{x}_k)], \vec{x}_k \in D_k \right\}$$

für eine messbare Menge $D_k \in \mathbb{R}^{n-1}$, z.B. ein abgeschlossenes Intervall, und stetige Funktionen $\phi, \psi : D_k \rightarrow \mathbb{R}$. Eine solche Menge nennt man auch **Normalbereich bezüglich x_k** oder graphartige Menge.

Beispiel 98 (Dreieck). Die Menge $\{(x, y)^T : y \in [0, x], x \in [0, 1]\}$ ist von dieser Art für $k = 2$, $x_2 = y$, $\vec{x}_2 = x$, $I_2 = [0, 1]$, $\phi(x) \equiv 0$ und $\psi(x) = x$.

Beispiel 99 (Kreisscheibe). Der Kreis $\{(x, y)^T : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ist von dieser Art für $k = 2$, $x_2 = y$, $\vec{x}_2 = x$, $I_2 = [-1, 1]$, $\phi(x) = -\sqrt{1-x^2}$, $\psi(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Beispiel 100. Die Menge $\{(x, y)^T : x^2 - y^2 \leq 1, |y| < 1\}$ ist von dieser Form für $k = 1$, $x_1 = x$, $\vec{x}_1 = y$, $I_1 = [-1, 1]$, $\phi(y) = -\sqrt{1+y^2}$ und $\psi(y) = \sqrt{1+y^2}$.

Beispiel 101 (Einheitstetraeder). Der Einheitstetraeder ist die Menge

$$\{(x, y, z)^T : x + y + z \leq 1, x, y, z \geq 0\}.$$

Er ist die konvexe Hülle seiner Eckpunkte $(0, 0, 0)^T$, $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$ und $(0, 0, 1)^T$ und Normalbereich über dem Dreieck $D_3 = \{(x, y)^T : x + y \leq 1, x, y \geq 0\}$ mit $\phi(x, y) = 0$ und $\psi(x, y) = 1 - x - y$.

Beispiel 102 (Rotationsflächen). Eine Rotationsfläche entsteht durch Drehung einer Fläche, die durch den Graphen einer Funktion $r = f(z)$ mit $f(z) \geq 0$ für alle $z \in [a, b]$ beschränkt ist, um die z -Achse:

$$D = \{(x, y, z)^T : x^2 + y^2 \leq f(z)^2\}.$$

So entsteht die Kugel durch Rotation der Fläche unter dem Graphen $r = \sqrt{1-z^2}$ für $z \in [-1, 1]$. Der Rotationshyperboloid die Rotationsfläche, die aus der Auflösung der Hyperbelgleichung $t^2 - z^2 = 1$ nach t entsteht.

Satz 43 (Zurückführung auf auf Integrale einer Variablen). *Wenn $D \subset \mathbb{R}^n$ Normalbereich bezüglich x_k und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gilt*

$$\int_D f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{D_k} \left(\int_{\phi(\vec{x}_k)}^{\psi(\vec{x}_k)} f(\vec{x}) dx_k \right) d\vec{x}_k.$$

Beweis. Als Normalbereich ist D messbar. Darum ist f auf D integrierbar und $\int_D f(\vec{x}) d\vec{x}$ kann als iteriertes Integral berechnet werden. Wir integrieren zuerst nach der Variablen x_k . Für festes $\vec{x}_k \in I_k$ verschwindet $\tilde{f}(\vec{x})$ als Funktion von x_k außerhalb des Intervalls $[\phi(\vec{x}_k), \psi(\vec{x}_k)]$. \square

Beispiel 103 (Flächeninhalt des Dreiecks). Für $a, b > 0$ betrachten wir $D = \{(x, y)^T : y \in [0, bx/a], x \in [0, a]\}$, ein rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlängen a und b und berechnen $\mu(D)$ als Integral der charakteristischen Funktion χ_D auf $I = [0, 1] \times [0, 1]$. Es gilt

$$\int_D 1 d(x, y) = \int_0^a \left(\int_0^{bx/a} 1 dy \right) dx = \int_0^a [y]_{y=0}^{y=bx/a} dx = \int_0^a \frac{b}{a} x dx = \frac{b}{2a} [x^2]_{x=0}^{x=a} = \frac{ab}{2}.$$

Beispiel 104. Wir betrachten $D = \{(x, y)^T : x \in [0, \pi], \sin x \leq y \leq x\}$ und die Funktion $f(x, y) = x$. Die Menge D ist ein Normalbereich bezüglich y mit $\phi(x) = \sin x$ und $\psi(x) = x$. Da f stetig ist, ist f auf D integrierbar und das Integral kann als iteriertes Integral berechnet werden.

$$\begin{aligned} \int_D x d(x, y) &= \int_0^\pi \left(\int_{\sin x}^x x dy \right) dx = \int_0^\pi [xy]_{y=\sin x}^{y=x} dx = \int_0^\pi -x \sin x + x^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^\pi - \left([x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi \cos x dx \right) = \frac{1}{3} \pi^3 - \pi \end{aligned}$$

Folgerung 14 (Volumen der Rotationskörper). *Das Volumen eines Rotationskörpers $D = \{(x, y, z)^T : x^2 + y^2 \leq f(z)^2, z \in [a, b]\}$ für eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ ist*

$$\int_D 1 d(x, y, z) = \int_a^b \pi f(z)^2 dz.$$

Beweis. Es gilt $D = \{(x, y, z)^T : z \in [a, b], |y| \leq f(z), |x| \leq \sqrt{f(z)^2 - y^2}\}$, also

$$\begin{aligned} \int_D 1 d(x, y, z) &= \int_a^b \left(\int_{-f(z)}^{f(z)} \left(\int_{-\sqrt{f(z)^2 - y^2}}^{\sqrt{f(z)^2 - y^2}} 1 dx \right) dy \right) dz \\ &= \int_a^b \left(\int_{-f(z)}^{f(z)} 2\sqrt{f(z)^2 - y^2} dy \right) dz \\ &\quad \text{Substitution } y = f(z) \sin t, dy = f(z) \cos t dt \\ &= \int_a^b \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2f(z)^2 \cos^2 t dt \right) dz \\ &= \int_a^b f(z)^2 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \cos^2 t dt \right) dz = \int_a^b f(z)^2 \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt \right) dz \\ &= \pi \int_a^b f(z)^2 dz, \end{aligned}$$

weil $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt = \pi$ (Orthogonalitätsrelation). □

Bemerkung 23. Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar aber kein Normalbereich, so kann man versuchen, D in Normalbereiche zu zerlegen, $D = D_1 \cup \dots \cup D_k$, so dass der Durchschnitt $D_i \cap D_j$ für beliebige Indizes i, j nur eine Nullmenge ist.

Beispiel 105 (Definition von Masse und Schwerpunkte). Es sei $\rho : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Dichtefunktion, z.B. Masse- oder Ladungsdichte, und $D \subset \mathbb{R}^3$ messbar. Dann ist

$$m := \int_D \rho(\vec{x}) d\vec{x}$$

die Masse (oder Ladungszahl) von D . Den Punkt

$$\vec{x}_S := \frac{1}{m} \int_D \rho(\vec{x}) \vec{x} \, d\vec{x}$$

nennt man Schwerpunkt von D . Hier wird das Integral der vektorwertigen Funktion komponentenweise berechnet. Es gilt dann $\int_D (\vec{x} - \vec{x}_S) \rho(\vec{x}) \, d\vec{x} = 0$.

5.5. Mittelwertsatz. Ähnlich wie für Funktionen einer Veränderlicher kann man das Integral mit Hilfe der Extremwerte der Funktion und das Volumen des Integrationsbereiches abschätzen.

Satz 44 (Mittelwertsatz). *Wenn $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf D integrierbar und D messbar, dann gilt*

$$\mu(D) \inf_{\vec{x} \in D} f(\vec{x}) \leq \int_D f(\vec{x}) \, d\vec{x} \leq \mu(D) \sup_{\vec{x} \in D} f(\vec{x})$$

und es existiert eine reelle Zahl η mit $\inf_{\vec{x} \in D} f(\vec{x}) \leq \eta \leq \sup_{\vec{x} \in D} f(\vec{x})$ und

$$\int_D f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \eta \mu(D).$$

Ist zusätzlich $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf D integrierbar und positiv, d.h. $g(\vec{x}) \geq 0$ für alle $\vec{x} \in D$, dann existiert eine reelle Zahl η mit $\inf_{\vec{x} \in D} f(\vec{x}) \leq \eta \leq \sup_{\vec{x} \in D} f(\vec{x})$ und

$$\int_D f(\vec{x}) g(\vec{x}) \, d\vec{x} = \eta \mu(D) \int_D g(\vec{x}) \, d\vec{x}.$$

5.6. Substitution, Koordinatenwechsel, Transformationsregel. Statt eine messbare Menge D in Normalbereiche zu zerlegen ist es häufig sinnvoller, geeignete Koordiante zu wählen, z.B. bei der Integration der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ über die Einheitskreisscheibe $K = \{(x, y)^T : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Bezüglich Polarkoordinaten lassen sich das Integrationsgebiet $K = \{(t, \phi)^T : 0 \leq r \leq 1\}$ und auch die Funktion $f(r, \phi) = r^2$ einfach ausdrücken. Aber was wird bei der Integration aus $d(x, y)$? Hier ist die Transformationsregel:

Satz 45 (Substitution). *Es sei $\vec{\Phi} : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und injektiv, D messbar und f stetig. Dann gilt mit den Koordinaten $\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{u})$*

$$\int_D f(\vec{\Phi}(\vec{u})) \left| \det(D\vec{\Phi}_{\vec{u}}) \right| \, d\vec{u} = \int_{\vec{\Phi}(D)} f(\vec{x}) \, d\vec{x}.$$

Beweis. Bei der Abbildung $D\vec{\Phi} (\approx \vec{\Phi})$ geht das abgeschlossene Intervall $I = [\vec{a}, \vec{b}]$ mit Fußpunkt \vec{u} in ein Parallelepiped mit Fußpunkt $\vec{\Phi}(\vec{u})$ über, das von den Vektoren $(b_j - a_j)(D\vec{\Phi}_{\vec{u}})(\vec{e}_j)$ aufgespannt wird und das Volumen $\mu(I) |\det(D\vec{\Phi}_{\vec{u}})|$ hat. \square

Bemerkung 24 (Betragszeichen in der Transformationsformel und Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge). Bei der Definition und Berechnung von Integralen auf Teilmengen $D \subset \mathbb{R}^n$ haben wir versteckt eine Orientierung des \mathbb{R}^n benutzt, denn die oberen Integrationsgrenzen sind immer größer als die unteren Integrationsgrenzen im iterierten Integral $\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(\vec{x}) \, dx_1 \cdots dx_n$. Auch ein Integral einer Funktion f über das Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist dann immer $\int_{[a,b]} f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$ und nie $\int_b^a f(x) \, dx$.

Durch diese Definition gewinnen wir die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge. Dafür muss man in der Transformationsformel den Absolutbetrag der

Determinante der Ableitungsmatrix als Faktor einfügen und darf nur injektive Abbildungen $\vec{\Phi}$ betrachten.

Bemerkung 25 (Injektivität der Parametrisierung $\vec{\Phi}$). Da das Integral einer Funktion auf einer Nullmenge 0 ist, muss die Parametrisierung $\vec{\Phi}$ nur außerhalb einer Nullmenge injektiv sein. Zum Beispiel ist die Polarkoordinatenabbildung $\vec{\Phi}(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)^T$ nur auf $(0, \infty) \times [0, 2\pi]$ injektiv. Zur Berechnung des Integrals einer Funktion auf der Einheitskreisscheibe K kann man aber $\vec{\Phi} : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow K$ benutzen.

Beispiel 106. Mit der Polarkoordinatenabbildung $\vec{\Phi}(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)^T$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{K=\{x^2+y^2 \leq R^2\}} 1 d(x, y) &= \int_{[0,R] \times [0,2\pi]} r d(r, \phi) \\ &= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} r d\phi \right) dr = \int_0^R 2\pi r dr = \pi R^2 \\ \int_{K=\{x^2+y^2 \leq R^2\}} x^2 + y^2 d(x, y) &= \int_{[0,R] \times [0,2\pi]} r^3 d(r, \phi) \\ &= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} r^3 d\phi \right) dr = \int_0^R 2\pi r^3 dr = \frac{\pi}{2} R^4 \end{aligned}$$

da $\det(D\vec{\Phi}) = r$. Das erste Integral ist wie erwartet der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius R .

Beispiel 107. Wir berechnen das Integral der Funktion $f(x, y, z) = x^2$ auf dem Zylinder $Z = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z \in [0, h]\}$ für ein festes $h > 0$. Mit Zylinderkoordinaten $\vec{\Phi}(r, \phi, z) = (r \cos \phi, r \sin \phi, z)^T$ erhält man $\det(D\vec{\Phi}) = r$, $f(r, \phi, z) = r^2 \cos^2 \phi$ und

$$\begin{aligned} \int_Z x^2 d(x, y, z) &= \int_{[0,1] \times [0,2\pi] \times [0,h]} r^3 \cos^2 \phi d(r, \phi, z) \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^h r^3 \cos^2 \phi dz \right) dr \right) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 hr^3 \cos^2 \phi dr \right) d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{h}{4} \cos^2 \phi d\phi \\ &= \frac{\pi h}{4}, \end{aligned}$$

weil $\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi = \pi$ (Orthogonalitätsrelation).

Beispiel 108 (Rotationskörper mit Zylinderkoordinaten). Es sei $D = \{(x, y, z)^T : x^2 + y^2 \leq f(z)^2, z \in [a, b]\}$ der Rotationskörper für eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ und $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist g auf D integrierbar und

$$\begin{aligned} \int_D g(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_{\{z \in [a,b], \phi \in [0,2\pi], r \in [0, f(z)]\}} g(r \cos \phi, r \sin \phi, z) r d(r, \phi, z) \\ &= \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{f(z)} g(r \cos \phi, r \sin \phi, z) r dr d\phi dz. \end{aligned}$$

Für $g \equiv 1$ erhält man eine Formel für das Volumen des Rotationskörpers:

$$\begin{aligned}\mu(D) &= \int_D 1 d(x, y, z) = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{f(z)} r dr d\phi dz = \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{f(z)^2}{2} d\phi dz \\ &= \int_a^b \pi f(z)^2 dz.\end{aligned}$$

Beispiel 109 (Volumen der Kugel). Wir berechnen das Volumen der Kugel $K = \{(x, y, z)^T : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ als $\int_K 1 d(x, y, z)$ durch Transformation auf Kugelkoordinaten, d.h. mit der Abbildung

$$\vec{\Phi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\Phi}(r, \phi, \psi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \cos \psi \\ r \sin \phi \cos \psi \\ r \sin \psi \end{pmatrix}.$$

In Beispiel 60 haben wir die Funktionaldeterminante $\det(D\vec{\Phi}) = r^2 \cos \psi$ berechnet. Nun gilt

$$\begin{aligned}\mu(K) &= \int_K 1 d(x, y, z) = \int_{[0, R] \times [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]} r^2 \cos \psi d(r, \phi, \psi) \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^R \left(\int_0^{2\pi} r^2 \cos \psi d\phi \right) dr \right) d\psi \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^R 2\pi r^2 \cos \psi dr \right) d\psi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2\pi}{3} R^3 \cos \psi d\psi = \frac{2\pi}{3} R^3 [\sin \psi]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{4\pi}{3} R^3.\end{aligned}$$

Beispiel 110 (Gaußsches Fehlerintegral). Es wurde schon gezeigt, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt$ existiert. Nun berechnen wir den Wert durch einen „Umweg“ über Integration einer Funktion in zwei Variablen. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-t^2} dt \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{\left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-R}^R e^{-y^2} dy \right)} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{\int_{[-R, R] \times [-R, R]} e^{-x^2 - y^2} d(x, y)}.\end{aligned}$$

Da der Kreis mit Radius $\sqrt{2}R$ das Intervall $[-R, R] \times [-R, R]$ enthält und der Kreis mit Radius R im Intervall $[-R, R] \times [-R, R]$ liegt, gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned}\int_{\{x^2 + y^2 \leq R^2\}} e^{-x^2 - y^2} d(x, y) &\leq \int_{[-R, R] \times [-R, R]} e^{-x^2 - y^2} d(x, y) \\ &\leq \int_{\{x^2 + y^2 \leq 2R^2\}} e^{-x^2 - y^2} d(x, y).\end{aligned}$$

Für einen beliebigen Radius ρ berechnen wir mit Hilfe der Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \int_{\{x^2+y^2 \leq \rho^2\}} e^{-x^2-y^2} d(x, y) &= \int_{[0, \rho] \times [0, 2\pi]} r e^{-r^2} d(r, \phi) = \int_0^\rho \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} d\phi dr \\ &= \int_0^\rho 2\pi r e^{-r^2} dr = -\pi [e^{-r^2}]_0^\rho = \pi (1 - e^{-\rho^2}). \end{aligned}$$

Da $R^2 \rightarrow \infty$ und $2R^2 \rightarrow \infty$ für $R \rightarrow \infty$, gilt $\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

5.7. Uneigentliche Integrale. Wir definieren Integrierbarkeit auf unbeschränkte Teilmengen $D \subset \mathbb{R}^n$ und für unbeschränkte Funktionen, also $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \pm\infty$ für ein $\vec{x}_0 \in \bar{D} \setminus D$. In solchen Fällen kann man keine Folge von Treppenfunktionen finden, die auf D gleichmäßig gegen f konvergiert. Wir definierten Integrierbarkeit mit Hilfe von Ausschöpfungsfolgen beschränkter Teilmengen $D_\rho \subset D$ auf denen auch f beschränkt ist.

Definition 36. *Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine unbeschränkte, zusammenhängende Menge. Eine Ausschöpfungsfolge ist eine Folge $\{D_\rho \subset D\}$ beschränkter, messbarer Teilmengen mit $R_\rho = \inf_{\vec{x} \in D \setminus D_\rho} \{|\vec{x}|\} \rightarrow \infty$ für $\rho \rightarrow \infty$.*

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt auf D uneigentlich integrierbar, wenn f auf jeder beschränkten, messbaren Teilmenge von D integrierbar ist und der Grenzwert

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{D_\rho} f(\vec{x}) d\vec{x}$$

für jede Ausschöpfungsfolge $\{D_\rho\}$ existiert und unabhängig von der gewählten Ausschöpfung ist.

*Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und messbar und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ unbeschränkt. Eine Folge $\{D_\rho \subset D\}$ abgeschlossener, messbarer Teilmengen heißt **Ausschöpfungsfolge**, wenn für alle ρ die Funktion $f : D_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt ist und $\mu(D \setminus D_\rho) \rightarrow 0$ für $\rho \rightarrow \infty$.*

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt auf D uneigentlich integrierbar, wenn f auf jeder abgeschlossenen, messbaren Teilmenge von D integrierbar ist und der Grenzwert

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{D_\rho} f(\vec{x}) d\vec{x}$$

für jede Ausschöpfungsfolge $\{D_\rho\}$ existiert und unabhängig von der gewählten Ausschöpfung ist.

Satz 46 (Kriterium für positive Funktionen). *Es sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(\vec{x}) \geq 0$ für alle $\vec{x} \in D$ und D zusammenhängend. Die Funktion f ist genau dann auf D integrierbar, wenn*

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{D_\rho} f(\vec{x}) d\vec{x}$$

für eine spezielle Ausschöpfungsfolge existiert.

Satz 47 (Absolute Integrierbarkeit). *Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ und D zusammenhängend. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann auf D integrierbar, wenn $|f|$ auf D integrierbar ist.*

Bemerkung 26. Durch eine Koordinatentransformation kann man ein Integral über eine unbeschränkte Menge immer in ein Integral über eine beschränkte Menge transformieren. Manchmal ist dieses dann auch ein eigentliches Integral, d.h. die Funktion ist beschränkt auf dem Abschluß des Integrationsgebietes.

Beispiel 111. Wir untersuchen, ob die Funktion $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ auf $D = \mathbb{R}^2$ integrierbar ist. Da $f(x, y) > 0$ für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$, genügt es, eine spezielle Ausschöpfung zu betrachten. Wir wählen $D_\rho = \{(x, y)^T : x^2 + y^2 \leq \rho^2\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{D_\rho} e^{-x^2-y^2} d(x, y) &= \int_{[0, \rho] \times [0, 2\pi]} e^{-r^2} r d(r, \phi) = \int_0^\rho \int_0^{2\pi} e^{-r^2} d\phi dr \\ &= \int_0^\rho 2\pi r e^{-r^2} dr = \pi[-e^{-r^2}]_0^\rho = \pi(-e^{-\rho^2} + 1) \end{aligned}$$

und

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{D_\rho} e^{-x^2-y^2} d(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \pi(-e^{-\rho^2} + 1) = \pi.$$

Beispiel 112. Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}$ auf $D = \{(x, y)^T : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$. Die Funktion f ist in der Nähe des Punktes $\vec{0}$ unbeschränkt. Aber es gilt $f(x, y) > 0$ für alle $(x, y)^T \in D$. Wir betrachten die spezielle Ausschöpfungsfolge $D_\delta = \{\delta^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ mit $D_\delta \rightarrow D$ für $\delta \rightarrow 0$. Es gilt

$$\int_{D_\delta} f(x, y) d(x, y) = \int_\delta^1 \int_0^{2\pi} (r^2)^{-1/2} r d\phi dr = \int_\delta^1 \int_0^{2\pi} 1 d\phi dr = 2\pi(1 - \delta)$$

und damit $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{D_\delta} f(x, y) d(x, y) = 2\pi$. Die ist auch der Wert des Integrals $\int_D f(x, y) d(x, y)$.

Beispiel 113. Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = x(x^2+y^2)^{-2}$ auf $D = \{(x, y)^T : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$. Die Funktion f ist in der Nähe des Punktes $\vec{0}$ unbeschränkt, weil $f(x, 0) = x^{-3}$. Da f nicht positiv ist, betrachten wir $|f(x, y)| = |x|(x^2 + y^2)^{-2}$ und die spezielle Ausschöpfungsfolge $D_\delta = \{\delta^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ mit $D_\delta \rightarrow D$ für $\delta \rightarrow 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{D_\delta} f(x, y) d(x, y) &= \int_\delta^1 \int_0^{2\pi} r |\cos \phi| (r^2)^{-2} r d\phi dr = \int_\delta^1 \int_0^{2\pi} \frac{|\cos \phi|}{r^2} d\phi dr \\ &= \int_\delta^1 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \phi}{r^2} d\phi dr = \int_\delta^1 4r^{-2} dr = -4 \left[\frac{1}{r} \right]_\delta^1 = -4 \left(1 - \frac{1}{\delta} \right) \end{aligned}$$

und der Grenzwert $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{D_\delta} |f(x, y)| d(x, y)$ existiert nicht. Also sind weder $|f|$ noch f auf D integrierbar.

Beispiel 114. Für welche α existiert das Integral der Funktion $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\alpha/2}$ auf $D = \{0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$? Da $f(x, y) \geq 0$ für alle $(x, y)^T \in D$, genügt es, eine spezielle Ausschöpfungsfolge zu betrachten, um diese Frage zu beantworten. Mit

$D_\delta = \{\delta^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{D_\delta} f(x, y) d(x, y) &= \int_\delta^1 \int_0^{2\pi} (r^2)^{\alpha/2} r d\phi dr = \int_\delta^1 \int_0^{2\pi} r^{\alpha+1} d\phi dr \\ &= \begin{cases} 2\pi \left[\frac{1}{\alpha+2} r^{\alpha+2} \right]_\delta^1 & \alpha \neq -1, -2 \\ 2\pi(1 - \delta) & \alpha = -1 \\ -2\pi \ln \delta & \alpha = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Da $\lim_{\delta \rightarrow 0} \ln \delta = -\infty$, $\lim_{\delta \rightarrow 0} (1 - \delta) = 1$ und $\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{\alpha+2}$ mit $\alpha \neq -2$ genau dann existiert und $= 0$ ist, wenn $\alpha > -2$, haben wir gezeigt, dass das Integral $\int_D f(x, y) d(x, y)$ genau dann existiert, wenn $\alpha > -2$. In dem Fall gilt

$$\int_D f(x, y) d(x, y) = \frac{2\pi}{\alpha + 2}.$$

Das Integral existiert also, wenn f für $r \rightarrow 0$ nicht stärker wächst als $1/r$.

Beispiel 115. Für welche α existiert das Integral der Funktion $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\alpha/2}$ auf der unbeschränkten Menge $D = \{x^2 + y^2 \geq 1\}$? Da $f(x, y) \geq 0$ für alle $(x, y)^T \in D$, genügt es, eine spezielle Ausschöpfungsfolge zu betrachten, um diese Frage zu beantworten. Mit $D_\rho = \{\rho^2 \geq x^2 + y^2 \geq 1\}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{D_\rho} f(x, y) d(x, y) &= \int_1^\rho \int_0^{2\pi} (r^2)^{\alpha/2} r d\phi dr = \int_1^\rho 2\pi r^{\alpha+1} d\phi dr \\ &= \begin{cases} 2\pi \left[\frac{1}{\alpha+2} r^{\alpha+2} \right]_1^\rho & \alpha \neq -1, -2 \\ 2\pi(\rho - 1) & \alpha = -1 \\ 2\pi \ln \rho & \alpha = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Da $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \ln \rho = \infty$, $\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\rho - 1) = \infty$ und $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^{\alpha+2}$ mit $\alpha \neq -2$ genau dann existiert und $= 0$ ist, wenn $\alpha < -2$, haben wir gezeigt, dass das Integral $\int_D f(x, y) d(x, y)$ genau dann existiert, wenn $\alpha < -2$. In dem Fall gilt

$$\int_D f(x, y) d(x, y) = -\frac{2\pi}{\alpha + 2}.$$

Das Integral existiert also, wenn f für $r \rightarrow \infty$ stärker als $1/r$ abfällt.

6. LAPLACETANSFORMATION

Wir beschäftigen uns mit der Laplacetransformation als Beispiel einer Integraltransformation

6.1. Integraltransformationen. Eine Integraltransformation T ist eine eindeutige Abbildung, die Funktionen f andere Funktionen $T(f)$ durch

$$T(f)(x) = \int_D K(x, t) f(t) dt$$

zuordnet, wobei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, das auch unbeschränkt sein kann, und K eine Kernfunktion. Natürlich ist eine Integraltransformation immer nur für Funktionen mit bestimmten Eigenschaften (Integrierbarkeit) definiert.

Beispiel 116. Durch Spezialisierung des Intervalls D und des Integralkerns K ergeben sich folgende wichtige Integraltransformationen.

- Mit $D = (-\infty, \infty)$ und $K(x, t) = \frac{1}{2\pi} e^{-ixt}$ erhält man die Fouriertransformation

$$F(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(t) dt$$

für $x \in \mathbb{R}$.

- Mit $D = (0, \infty)$ und $K(x, t) = e^{-xt}$ erhält man die Laplacetransformation

$$L(f)(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) dt$$

für $x \in \mathbb{C}$

- Mit $D = \mathbb{N}$ und $K(x, n) = x^{-n}$ erhält man die diskrete Z -Transformation

$$Z(f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) x^{-n}$$

für $x \in \mathbb{C}$.

Integraltransformationen sind lineare Operatoren. Durch Integraltransformationen werden Probleme im Originalbereich in Probleme im Bildbereich übersetzt, wo sie sich (vielleicht) einfacher lösen lassen. Zum Beispiel geht bei der Laplace-Transformation eine Differentialgleichung in eine (algebraische) Gleichung über. Es ist wichtig, dass man die im Bildbereich gefundene Problemlösung wieder in den Originalbereich zurücktransformieren kann. Dies ist prinzipiell möglich, wenn die Integraltransformation injektiv ist (Eindeutigkeitssätze!). Für die praktische Durchführung dieser inversen Abbildung T^{-1} sind Rechenregeln, Tabellen und das Faltungsprodukt wichtige Hilfsmittel.

Bemerkung 27. Die Funktionen $f(t) = e^t$, $f(t) = \sin t$ und $f(t) = \cos t$ sind nicht Fourier-transformierbar, jedoch kann man die Laplacetransformation auf sie anwenden.

6.2. Definition und erste Beispiele für Laplacetransformierte.

Definition 37. Es sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion

$$L(f)(z) = F(z) := \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt$$

heißt, falls sie existiert, **Laplacetransformierte** von f .

Beispiel 117 (Monome). Wenn $f(t) = t^n$ mit $n \in \mathbb{N}$, dann gilt für $z = x + iy$ mit $x > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt &= \int_0^\infty e^{-zt} t^n dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-zt} t^n dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{z} e^{-zt} t^n \right]_0^b + \int_0^b \frac{n}{z} e^{-zt} t^{n-1} dt = \frac{n}{z} \int_0^\infty e^{-zt} t^{n-1} dt \end{aligned}$$

für $x > 0$, da die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom. Induktion über n liefert dann eine Funktion $L(t^n) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$L(t^n)(z) = \int_0^\infty e^{-zt} t^n dt = \frac{n!}{z^{n+1}}, \text{ da } \int_0^\infty e^{-zt} dt = \frac{1}{z}.$$

Es gibt eine große Klasse von Funktionen, für die die Laplacetransformierte als Funktion auf einem Halbraum $\{z \in \mathbb{C} : \Re(Z) > \sigma\}$ mit $\sigma \in \mathbb{R}$ existiert.

Definition 38. Eine Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **von exponentieller Ordnung** σ , wenn f für $t \rightarrow \infty$ höchstens exponentiell wächst. Dies bedeutet, dass reelle Konstanten $t_0, \sigma \geq 0$ und $M > 0$ existieren, so dass $|f(t)| \leq M e^{\sigma t}$ für alle $t \geq t_0$.

Lemma 16. Wenn $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[0, b]$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung σ , so existiert das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt$ für alle z mit $\Re(z) > \sigma$.

Beweis. Da f auf jedem Intervall $[0, b]$ stückweise stetig ist, existiert dort das Integral $\int_0^b e^{-xt} f(t) dt$. Da $|e^{-zt} f(t)| \leq M e^{(\sigma-x)t}$, konvergiert $\int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt$ für alle z mit $\Re(z) > \sigma$ absolut, weil der Exponent negativ ist. \square

Beispiel 118 (Funktionen von exponentieller Ordnung). Polynome, $e^{\alpha t}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$, beschränkte Funktionen, stetige Funktionen mit kompaktem Träger

Beispiel 119 (Heaviside-Funktion). Für $a > 0$ betrachten wir die Funktion $h_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h_a(t) = \begin{cases} 1 & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

und berechnen für $z \in \mathbb{C}$ mit $\Re(z) > 0$ die Laplacetransformierte

$$L(h_a)(z) = \int_0^\infty e^{-zt} h_a(t) dt = \int_a^\infty e^{-zt} dt = -\frac{1}{z} [e^{-zt}]_{t=a}^{t=\infty} = \frac{e^{-az}}{z}.$$

Satz 48 (Linearität der Laplacetransformation). Wenn f und g stückweise stetig und von exponentieller Ordnung σ sind, dann gilt

$$L(f + g) = L(f) + L(g) \text{ und } L(cf) = cL(f) \text{ für alle } c \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Linearität des Integrals \square

Beispiel 120 (Polynome). Es sei $p(t) = \sum_{j=0}^n a_j t^j$ mit reellen Koeffizienten $a_j \in \mathbb{R}$. Dann ist die Laplace-Transformierte

$$L(p)(x) = \int_0^\infty e^{-zt} p(t) dt = \sum_{j=0}^n a_j \int_0^\infty e^{-zt} t^j dt = \sum_{j=0}^n a_j \frac{j!}{z^{j+1}}.$$

Beispiel 121 (Laplace-transformierte der Sinus- und Kosinusfunktion). Aus der Linearität folgt für $\Re(z) > 0$ und $\omega > 0$

$$\begin{aligned} L(\cos(\omega t))(z) + iL(\sin(\omega t))(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} \cos(\omega t) dt + i \int_0^\infty e^{-zt} \sin(\omega t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-zt} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) dt = \int_0^\infty e^{-zt} e^{i\omega t} dt \\ &= \int_0^\infty e^{(i\omega - z)t} dt = \frac{1}{z - i\omega} = \frac{z + i\omega}{z^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

und damit

$$L(\cos(-\omega t))(z) + iL(\sin(-\omega t))(z) = L(\cos(\omega t))(z) - iL(\sin(\omega t))(z) = \frac{z - i\omega}{z^2 + \omega^2}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich

$$L(\cos(\omega t))(z) = \frac{z}{z^2 + \omega^2}, \quad L(\sin(\omega t))(z) = \frac{\omega}{z^2 + \omega^2}.$$

6.3. Eigenschaften der Laplace-Transformation.

Satz 49 (Ähnlichkeit). *Wenn $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung σ , dann gilt für alle $\alpha > 0$*

$$L(f(\alpha t))(z) = \frac{1}{\alpha} L(f(t))\left(\frac{z}{\alpha}\right).$$

Beweis. Für alle $\alpha > 0$ gilt mit der Substitution $s = \alpha t$, $ds = \alpha dt$

$$\int_0^\infty e^{-zt} f(\alpha t) dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty e^{-\frac{z}{\alpha}s} f(s) ds.$$

□

Beispiel 122. Es gilt

$$L(\sin(\omega t))(z) = \frac{\omega}{z^2 + \omega^2} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{(z/\omega)^2 + 1} = \frac{1}{\omega} L(\sin t)(z/\omega).$$

Satz 50 (Dämpfung). *Wenn $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung σ , dann gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $\Re(z) > \sigma - \alpha$*

$$L(e^{-\alpha t} f(t))(z) = L(f(t))(z + \alpha).$$

Beweis. Es gilt für alle $\Re(z) + \alpha > \sigma$

$$\int_0^\infty e^{-zt} e^{-\alpha t} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(z+\alpha)t} f(t) dt = L(f(t))(z + \alpha).$$

□

Beispiel 123. Für $\Re(z) > \alpha$ gilt

$$L(1)(z) = \frac{1}{z} = L(e^{-\alpha t} e^{\alpha t})(z) = L(e^{\alpha t})(z + \alpha) = \frac{1}{z + \alpha - \alpha}, \text{ also } L(e^{\alpha t})(z) = \frac{1}{z - \alpha}.$$

Satz 51 (Transformation von Ableitungen). *Wenn $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig differenzierbar und f und f' von exponentieller Ordnung σ , dann gilt*

$$L(f')(z) = zL(f)(z) - f(0).$$

Wenn $f \in \mathcal{C}^n([0, \infty))$ und alle Ableitungen $f^{(j)}$ von exponentieller Ordnung sind, dann gilt

$$L(f^{(n)})(z) = z^n L(f)(z) - \sum_{j=1}^n z^{j-1} f^{(n-j)}(0).$$

Beweis. Die Voraussetzungen an f und f' sichern, dass die auftretenden uneigentlichen Integrale existieren. Mit partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} L(f')(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} f'(t) dt = [e^{-zt} f(t)]_0^\infty + z \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt \\ &= -f(0) + zL(f)(z). \end{aligned}$$

Die Aussage für die Laplacetransformierte der n -ten Ableitung folgt durch Induktion über n , z.B. $L(f'')(z) = zL(f')(z) - f'(0) = z(zL(f) - f(0)) - f'(0)$. \square

Beispiel 124. Anwendung der Formel für die Laplacetransformierte der Ableitung auf $f(t) = t^n$ und $f(t) = \sin t$ führt zu

$$nL(t^{n-1})(z) = zL(t^n)$$

$$L(\cos t)(z) = L(\sin' t)(z) = zL(\sin t)(z) - \sin 0 = z \frac{1}{z^2 + 1}.$$

Satz 52 (Ableitung der Laplacetransformierten). *Wenn $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung σ , dann gilt*

$$\frac{d^n L(f)(z)}{dz^n} = (-1)^n L(t^n f(t))(z).$$

Beweis. Da f von exponentieller Ordnung ist, konvergiert das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt$ gleichmäßig und Integration nach t und Differentiation nach z können vertauscht werden. Also gilt

$$\frac{dL(f)(z)}{dz} = \int_0^\infty \frac{de^{-zt}}{dz} f(t) dt = - \int_0^\infty e^{-zt} t f(t) dt = (-1)L(tf(t))(z).$$

Die Aussage für die n -te Ableitung folgt mit vollständiger Induktion durch mehrmaliges Ableiten. \square

Beispiel 125. Da $\frac{1}{t} \sin t$ auf $[0, \infty)$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung ist, gilt

$$\frac{1}{z^2 + 1} = L(\sin t)(z) = L\left(t \frac{\sin t}{t}\right) = -L\left(\frac{\sin t}{t}\right)'(z).$$

Durch Integration der Gleichung folgt

$$L\left(\frac{\sin t}{t}\right)(z) = c - \arctan z$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.

Folgerung 15 (Laplacetransformierte einer Stammfunktion). *Wenn f und $g(t) := \int_0^t f(s) ds$ Laplace-transformierbar, dann gilt*

$$L\left(\int_0^t f(s) ds\right)(z) = \frac{1}{z} L(f)(z).$$

Beweis. Es gilt $f(t) = g'(t)$ und $g(0) = 0$, also $L(f)(z) = zL(g)(z) - g(0) = zL(g)(z)$. \square

Satz 53 (Grenzwertsätze). *Wenn f und f' stückweise stetig und von exponentieller Ordnung σ , dann gilt*

$$\lim_{z \rightarrow \infty} L(f)(z) = 0 \text{ und } \lim_{z \rightarrow \infty} zL(f)(z) = f(0),$$

falls f zusätzlich in $[0, \infty)$ stetig ist.

Beweis. Da f von exponentieller Ordnung ist, existieren Konstanten M, t_0, σ , so dass $|f(t)| \leq Me^{\sigma t}$ für alle $t \geq t_0$. Nun gilt für $\Re(z) > 0, \sigma$

$$\begin{aligned} |L(f)(z)| &= \left| \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt \right| \leq \int_0^\infty e^{-\Re(z)t} |f(t)| dt \\ &\leq \int_0^{t_0} e^{-\Re(z)t} |f(t)| dt + \int_{t_0}^\infty M e^{-(\Re(z)-\sigma)t} dt \\ &= \int_0^{t_0} e^{-\Re(z)t} |f(t)| dt + M \left[\frac{1}{\sigma - \Re(z)} e^{-(\Re(z)-\sigma)t} \right]_{t_0}^\infty \\ &= \int_0^{t_0} e^{-\Re(z)t} |f(t)| dt + M \frac{e^{-(\Re(z)-\sigma)t_0}}{\Re(z) - \sigma} \end{aligned}$$

und $\lim_{z \rightarrow \infty} |L(f)(z)| = 0$, da beide Summanden für $z \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergieren. Die zweite Aussage folgt aus $L(f')(z) = zL(f)(z) - f(0)$. \square

Beispiel 126. Da $L(t^{-1} \sin t)(z) = c - \arctan z$ und $\lim_{z \rightarrow \infty} \arctan z = \pi/2$, folgt $c = \pi/2$, d.h. $L(t^{-1} \sin t)(z) = \pi/2 - \arctan z$.

6.4. Inverse der Laplace-Transformation.

Satz 54 (Eindeutigkeitssatz). *Wenn f, g stückweise stetig, von exponentieller Ordnung σ und $L(f)(z) = L(g)(z)$ für alle $\Re(z) > \sigma$, dann gilt $f(t) = g(t)$ für alle Stetigkeitsstellen t .*

Bemerkung 28. Die Laplacetransformation ist auf der Menge der stetigen Funktionen exponentieller Ordnung injektiv.

Bemerkung 29. Die inverse Laplacetransformation $L^{-1}(F)(t)$ kann mit Hilfe eines Kurvenintegrals in der komplexen Ebene berechnet werden:

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{zt} F(z) dz \\ L(f(t))(w) &= \int_0^\infty e^{-wt} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{zt} F(z) dz dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \int_0^\infty e^{(z-w)t} F(z) dt dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{F(z)}{z-w} [e^{(z-w)t}]_0^\infty dz \quad \Re(w) > \Re(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{F(z)}{z-w} dz = F(w) \end{aligned}$$

Satz 55 (Verschiebung). *Wenn $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } 0 \leq t \leq c \\ g(t-c) & , \text{ falls } t > c \end{cases}$$

und g stückweise stetig und von exponentieller Ordnung, dann gilt

$$L(f)(z) = e^{-cz}L(g(t))(z).$$

Beweis. Mit der Substitution $s = t - c$ folgt

$$\begin{aligned} L(f)(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt = \int_c^\infty e^{-zt} g(t - c) dt = \int_0^\infty e^{-z(s+c)} g(s) ds \\ &= e^{-cz} \int_0^\infty e^{-zs} g(s) ds. \end{aligned}$$

□

6.4.1. *Lösung von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.*

Wir betrachten das Anfangswertproblem $y'' + 5y' + 4y = t$, $y(0) = y'(0) = 0$. Die Laplacetransformierte der Differentialgleichung ist

$$\begin{aligned} L(t)(z) &= L(y'')(z) + 5L(y')(z) + 4L(y)(z) \\ \frac{1}{z^2} &= z^2L(y)(z) - zy(0) - y'(0) + 5(zL(y)(z) - y(0)) + 4L(y)(z) \\ \frac{1}{z^2} &= (z^2 + 5z + 4)L(y)(z), \end{aligned}$$

also

$$L(y)(z) = \frac{1}{z^2(z^2 + 5z + 4)}.$$

Hier können wir y mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung und ermitteln. Es existieren $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2(z^2 + 5z + 4)} &= \frac{1}{z^2(z + 1)(z + 4)} = \frac{a}{z^2} + \frac{b}{z} + \frac{c}{z + 1} + \frac{d}{z + 4} \\ &= aL(t) + bL(1) + cL(e^{-t}) + dL(e^{-4t}) = L(at + b + ce^{-t} + de^{-4t}). \end{aligned}$$

Also gilt $y(t) = at + b + ce^{-t} + de^{-4t}$ für diese reellen Konstanten a, b, c, d .

Die Gleichung einer harmonischen Schwingung $y'' + \omega^2y = 0$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = v_0$ wird durch die Laplacetransformation in

$$\begin{aligned} 0 &= L(y'')(z) + \omega^2L(y)(z) = z^2L(y)(z) - zy(0) - y'(0) + \omega^2L(y)(z) \\ &= (z^2 + \omega^2)L(y)(z) - v_0 \\ L(y)(z) &= \frac{v_0}{z^2 + \omega^2} = \frac{v_0}{\omega}L(\sin(\omega t))(z) \end{aligned}$$

verwandelt. Aus dem Eindeutigkeitsatz folgt, dass $y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems in der Menge der stetigen Funktionen von exponentieller Ordnung ist.

6.4.2. *δ -Distribution.* Die δ -Distribution ist eine „Dichtefunktion“ δ_x mit Masse 1, deren ganze Masse in einem Punkt x konzentriert ist. Für Funktionen sind die Eigenschaften $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1$ und $f(t) = 0$ für alle $t \neq x$ unvereinbar. Darum existiert δ_x nur im Sinne von Distributionen, einem verallgemeinerten Funktionenbegriff. Wir können eine δ -Funktion als „Grenzwert“ echter Funktionen behandeln, nämlich $\delta_x = \lim_{h \rightarrow \infty} f_h$ mit

$$f_h(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < x \text{ oder } t > x + 1/h \\ h & x \leq t \leq x + 1/h \end{cases}.$$

Da

$$\begin{aligned} L(f_h)(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} f_h(t) dt = \int_x^{x+1/h} e^{-zt} h dt = -\frac{h}{z} [e^{-zt}]_x^{x+1/h} \\ &= \frac{h}{z} e^{-zx} (1 - e^{-z/h}) \\ \lim_{h \rightarrow \infty} L(f_h)(z) &= e^{-xz} \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-z/h}}{z/h} = e^{-xz} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-s}}{s} = e^{-xz} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{-s}}{1} = e^{-xz}, \end{aligned}$$

kann man die δ -Distribution auch als $L^{-1}(e^{-xz})$, also eine Funktionen, deren Laplacetransformierte e^{-xz} ist, definieren.

6.5. $2L$ -periodische Funktionen. Zur Berechnung der Laplacetransformierten $2L$ -periodischer Funktionen genügt es, über das Intervall $[0, 2L]$ zu integrieren. Wenn f eine $2L$ -periodische stückweise stetige Funktion von exponentieller Ordnung ist, dann gilt

$$\begin{aligned} L(f)(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt = \sum_{n=0}^\infty \int_{2nL}^{(2(n+1)L} e^{-zt} f(t) dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^{2L} e^{-z(s+2nL)} f(s+2nL) ds \quad (t = s + 2nL) \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^{2L} e^{-z(s+2nL)} f(s) ds = \sum_{n=0}^\infty \int_0^{2L} e^{-2znL} e^{-zs} f(s) ds \\ &= \int_0^{2L} e^{-zs} f(s) ds \sum_{n=0}^\infty (e^{-2zL})^n = \frac{1}{1 - e^{-2zL}} \int_0^{2L} e^{-zs} f(s) ds. \end{aligned}$$

Beispiel 127 (Rechteckimpuls). Die 2π -periodische Fortsetzung f der Funktion

$$t \mapsto \begin{cases} 1 & t \in [0, \pi) \\ 0 & t \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

ist

$$\begin{aligned} L(f)(z) &= \frac{1}{1 - e^{-2z\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-zs} f(s) ds = \frac{1}{1 - e^{-2z\pi}} \int_0^\pi e^{-zs} ds \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2z\pi}} \frac{1 - e^{-z\pi}}{z} = \frac{1}{z(1 + e^{-z\pi})}. \end{aligned}$$

6.6. Faltung. Der Multiplikation im Bildbereich, also von Laplacetransformierten, entspricht im Originalbereich die Faltung von Funktionen.

Definition 39. Das **Faltungsprodukt** zweier (integrierbarer) Funktionen f, g ist

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s) ds.$$

Das Faltungsprodukt ist kommutativ, denn mit $u = t - s$, $du = -ds$ gilt

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s) ds = - \int_t^0 f(u)g(t-u) du = \int_0^t g(t-u)f(u) du = (g * f)(t).$$

Das Faltungsprodukt glättet (siehe periodisches Faltungsprodukt).

Satz 56. Wenn $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung, dann gilt $L(f * g) = L(f)L(g)$.

Beweis. Die Funktion $f(t-s)g(s)$ ist auf der Menge $D = \{(t, s) : 0 \leq t, 0 \leq s \leq t\}$ integrierbar, weil f und g von exponentieller Ordnung sind. Die iterierten Integrale auf der Menge D existieren dann auch und sind unabhängig von der Reihenfolge der Integration.

$$\begin{aligned} L(f * g)(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} \int_0^t f(t-s)g(s) ds dt \\ &= \int_0^\infty e^{-z(u+s)} \int_0^\infty f(u)g(s) ds du \quad (u = t - s) \\ &= L(f)(z)L(g)(z) \end{aligned}$$

□

Beispiel 128. Wir suchen h mit

$$L(h)(z) = \frac{1}{z^2(z+1)(z+4)},$$

ohne eine Partialbruchzerlegung durchzuführen. Es gilt

$$\frac{1}{z^2} = L(t)(z), \quad \frac{1}{z+1} = L(e^{-t})(z), \quad \frac{1}{z+4} = L(e^{-4t})(z).$$

Nun folgt mit Hilfe der Faltung

$$\frac{1}{z^2(z+4)} = L(t)(z)L(e^{-4t})(z) = L\left(\int_0^t (t-s)e^{-4s} ds\right).$$

Zur Berechnung des Integrals benötigen wir die durch partielle Integration herleitbaren Formeln

$$\begin{aligned} \int e^{\alpha s} ds &= \frac{e^{\alpha s}}{\alpha} \\ \int s e^{\alpha s} ds &= \frac{1}{\alpha} s e^{\alpha s} - \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha s} = \frac{e^{\alpha s}}{\alpha^2} (\alpha s - 1) \\ \int s^2 e^{\alpha s} ds &= \frac{e^{\alpha s}}{\alpha^3} (\alpha^2 s^2 - 2\alpha s + 2). \end{aligned}$$

Nun folgt

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-s)e^{-4s} ds &= \int_0^t t e^{-4s} - s e^{-4s} ds \\ &= -\frac{t}{4} [e^{-4s}]_0^t - \frac{1}{16} [e^{-4s}(-4s-1)]_0^t \\ &= \frac{t}{4} + \frac{e^{-4t}}{16} - \frac{1}{16} \\ \frac{1}{z+1} \cdot \frac{16}{z^2(z+4)} &= L\left(\int_0^t e^{-(t-s)}(4s + e^{-4s} - 1) ds\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \int_0^t e^{-(t-s)}(4s + e^{-4s} - 1) ds &= e^{-t} \int_0^t e^s(4s + e^{-4s} - 1) ds \\
 &= e^{-t} \int_0^t e^s(4s - 1) + e^{-3s} ds \\
 &= e^{-t} \left[e^s(4s - 5) - \frac{e^{-3s}}{3} \right]_0^t \\
 &= 4t - 5 - \frac{e^{-4s}}{3} + e^{-t} \frac{16}{3}.
 \end{aligned}$$

Also

$$L^{-1} \left(\frac{1}{z^2(z+1)(z+4)} \right) = \frac{t}{4} - \frac{5}{16} - \frac{e^{-4s}}{48} + e^{-t} \frac{1}{3}.$$

Beispiel 129. Mit Hilfe des Faltungsproduktes berechnen wir

$$\begin{aligned}
 L^{-1} \left(\frac{1}{z^2(1+z^2)} \right) &= L^{-1} (L(t)(z)L(\sin t)(z)) = t * \sin t = \int_0^t (t-s) \sin s ds \\
 &= t [-\cos s]_0^t - \int_0^t s \sin s ds \\
 &= t(1 - \cos t) + \left([s \cos s]_0^t - \int_0^t \cos s ds \right) = t - \sin t.
 \end{aligned}$$

Beispiel 130. Mit Hilfe der Faltung berechnen wir für $\beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 L \left(\frac{1}{(z^2 + \beta^2)^2} \right) &= L \left(\frac{1}{\beta} L(\sin(\beta t))(z) \cdot \frac{1}{\beta} L(\sin(\beta t))(z) \right) \\
 &= \frac{1}{\beta^2} \int_0^t \sin(\beta(t-s)) \sin(\beta s) ds \\
 &= \frac{1}{2\beta^2} \int_0^t \cos(\beta(t-2s)) - \cos(\beta t) ds \quad (\text{Additionstheoreme}) \\
 &= \frac{1}{2\beta^2} \left[-\frac{1}{2\beta} \sin(\beta(t-2s)) - s \cos(\beta t) \right]_{s=0}^{s=t} \\
 &= \frac{1}{2\beta^2} \left(\frac{\sin(\beta t)}{\beta} - t \cos(\beta t) \right).
 \end{aligned}$$

7. KURVEN, FLÄCHEN, INTEGRALSÄTZE

7.1. Kurvenlängen und Flächeninhalte. Teilmengen des \mathbb{R}^n lassen sich durch ein System von Gleichungen und Ungleichungen beschreiben oder als Bild einer Abbildung.

Beispiel 131 (Kreis). Der Kreis vom Radius R um den Koordinatenursprung ist die Menge $M = \{(x, y)^T : x^2 + y^2 = R^2\}$, d.h. M ist durch eine Gleichung gegeben. Aber es gilt auch $M = \gamma([0, 2\pi])$ mit $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)^T$, d.h. M ist das Bild einer Abbildung einer Veränderlichen.

Beispiel 132 (Sphäre). Die Kugel mit Radius R ist die Menge $M = \{(x, y, z)^T : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$, d.h. M ist durch eine Gleichung gegeben. Aber es gilt auch $M = \vec{\Phi}([0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2])$ mit $\vec{\Phi}(\phi, \psi) = (R \cos \phi \cos \psi, R \sin \phi \cos \psi, R \sin \psi)^T$, d.h. M ist das Bild einer Abbildung von zwei Veränderlichen.

Beispiel 133 (Graph einer Funktion). Der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Menge $M = \{(\vec{x}, y) : y = f(\vec{x})\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, also gegeben durch eine Gleichung, oder eben das Bild der Abbildung $\vec{x} \mapsto (\vec{x}, f(\vec{x}))^T$.

Beispiel 134 (Gerade, Strecke). Eine Gerade durch zwei Punkte $\vec{x}_0 \neq \vec{x}_1$ ist die Menge $M = \{\vec{x}_0 + t(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) : t \in \mathbb{R}\}$, also das Bild der Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(t) = \vec{x}_0 + t(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)$. Die Menge M lässt sich auch durch Gleichungen beschreiben. Dazu sei $\{\vec{x}_1 - \vec{x}_0, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ eine Orthogonalbasis des \mathbb{R}^n . Dann gilt $M = \{\vec{x} : \langle \vec{x} - \vec{x}_0, \vec{v}_j \rangle = 0 \forall j\}$.

Eine Strecke von \vec{x}_0 nach \vec{x}_1 erhält man durch Einschränkung des Definitionsbereiches von γ auf das Intervall $[0, 1]$.

Beispiel 135 (Ebene). Eine Ebene durch die Punkte $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2$ mit der Eigenschaft $\vec{x}_1 - \vec{x}_0$ und $\vec{x}_2 - \vec{x}_0$ sind linear unabhängig ist die Menge

$$M = \{\vec{x}_0 + t_1(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) + t_2(\vec{x}_2 - \vec{x}_0) : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\},$$

also das Bild der Abbildung $\vec{\Phi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\vec{\Phi}(t_1, t_2) = \vec{x}_0 + t_1(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) + t_2(\vec{x}_2 - \vec{x}_0).$$

Auch eine Ebene kann man durch Gleichungen beschreiben. Dazu sei $\{\vec{x}_1 - \vec{x}_0, \vec{x}_2 - \vec{x}_0, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n\}$ Basis von \mathbb{R}^n mit der Eigenschaft, dass \vec{v}_j für alle j senkrecht auf $\vec{x}_1 - \vec{x}_0$ und $\vec{x}_2 - \vec{x}_0$ steht. Dann gilt $M = \{\vec{x} : \langle \vec{x} - \vec{x}_0, \vec{v}_j \rangle = 0 \forall j\}$.

Beispiel 136 (Schraubenlinie). Zu gegebenen Konstanten $R > 0$ und $h > 0$ heißt die Menge $M = \{(R \cos t, R \sin t, ht)^T : t \in \mathbb{R}\}$ Schraubenlinie. Sie ist das Bild der Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t, ht)^T$. Eine Beschreibung der Menge M durch Gleichungen ist $M = \{(x, y, z)^T : x = R \cos(z/h), y = R \sin(z/h)\}$.

Beispiel 137 (Zylindermantel). Der Zylindermantel mit Radius R und Höhe h ist die Menge $M = \{(x, y, z)^T : x^2 + y^2 = R^2, 0 \leq z \leq h\}$, also gegeben durch eine Gleichung und zwei Ungleichungen. Mit Zylinderkoordinaten (und $r = R$) gilt $M = \vec{\Phi}([0, 2\pi] \times [0, h])$, $\vec{\Phi}(\phi, z) = (R \cos \phi, R \sin \phi, z)^T$.

Beispiel 138 (Kegel). Die Menge $M = \{(x, y, z)^T : x^2 + y^2 = (z - h)^2, 0 \leq z \leq h\}$ ist ein Kegel der Höhe h und Radius der Grundfläche R . Er ist durch eine Gleichung und zwei Ungleichungen gegeben. Außerdem gilt $M = \vec{\Phi}([0, 2\pi] \times [0, h])$ mit

$$\vec{\Phi}(\phi, z) = \left(\frac{R}{h}(h - z) \cos \phi, \frac{R}{h}(h - z) \sin \phi, z \right)^T.$$

Beispiel 139 (Paraboloid als Beispiel einer Rotationsfläche). Die Menge $M = \{(x, y, z)^T : x^2 + y^2 = z\}$ ist ein Paraboloid und durch eine Gleichung gegeben. Außerdem gilt $M = \vec{\Phi}([0, 2\pi] \times [0, \infty))$ mit $\vec{\Phi}(\phi, \zeta) = (\zeta \cos \phi, \zeta \sin \phi, \zeta^2)^T$.

Die in den Beispielen beschriebenen Mengen sind Nullmengen in den Räumen, in denen sie eingebettet sind, denn sie enthalten keine inneren Punkte. Trotzdem haben sie als ein- bzw. zweidimensionale Objekte eine Länge bzw. einen Flächeninhalt. Zur Bestimmung dieses Maßes muß man die richtige Anzahl von Integrationsvariablen einführen.

7.1.1. Kurven.

Definition 40. Eine **Kurve** ist das Bild $\gamma([a, b])$ einer Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Die Kurve heißt **glatt**, wenn γ eine stetig differenzierbare Abbildung ist und $\dot{\gamma}(t) \neq \vec{0}$ für alle $t \in [a, b]$. Die Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Parametrisierung** der Kurve $\gamma([a, b])$, wenn γ stetig differenzierbar, bijektiv auf (a, b) und $\dot{\gamma}(t) \neq \vec{0}$ für alle $t \in [a, b]$.

Eine Kurve K heißt **stückweise glatt**, wenn endlich viele Parametrisierungen $\gamma_j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatter Kurven $K_j = \gamma_j([a_j, b_j])$ existieren, so dass $K = \cup_j K_j$, $\gamma_j(b_j) = \gamma_{j+1}(a_{j+1})$ und $\gamma_j(a_j, b_j) \cap \gamma_k(a_k, b_k) = \emptyset$ für alle $j \neq k$.

Kreise, Geraden, Strecken, Schraubenlinien und Graphen glatter Funktionen einer Variablen aus den Beispielen sind glatte Kurven.

Beispiel 140 (Einheitsquadrat). Der Rand der Menge $M = \{(x, y)^T : |x|, |y| \leq 1\}$ ist eine stückweise glatte Kurve, die aus den Strecken $\gamma_1(t) = (1, t)^T$, $\gamma_2(t) = (1 - t, 1)^T$, $\gamma_3(t) = (-1, 1 - t)^T$ und $\gamma_4(t) = (-1 + t, -1)^T$ mit $t \in [-1, 1]$ besteht.

Definition 41. Es sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung einer glatten Kurve. Dann ist die **Kurvenlänge** der Kurve $\gamma([a, b])$ der Wert

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Die Länge einer stückweisen glatten Kurve ist die Summe der Längen der glatten Teilkurven.

Diese Definition ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung der glatten Kurve, denn wenn $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\tilde{\gamma}([\tilde{a}, \tilde{b}]) \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Parametrisierungen der Kurve K sind, so ist die Funktion $h : [a, b] \rightarrow [\tilde{a}, \tilde{b}]$ mit $h(t) = \tilde{\gamma}^{-1}(\gamma(t))$ eine glatte Funktion und aus der Substitutionsregel folgt

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} |\dot{\tilde{\gamma}}(\tilde{t})| d\tilde{t} = \int_{h^{-1}(\tilde{a})}^{h^{-1}(\tilde{b})} |\dot{\tilde{\gamma}}(h(t))| h'(t) dt = \int_a^b |\dot{\tilde{\gamma}}(h(t)) h'(t)| dt = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Die Ableitung $\dot{\gamma}$ der Parametrisierung γ bildet einen Tangentialvektor an den Punkt t der Länge 1 auf einen Tangentialvektor an den Punkt $\gamma(t)$ der Länge $|\dot{\gamma}(t)|$ ab.

Beispiel 141 (Kreis). Mit $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)^T$ und $t \in [0, 2\pi]$ gilt

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

Beispiel 142 (Schraubenlinie). Mit $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t, ht)^T$ und $t \in [0, 2\pi]$, dies entspricht einer Umdrehung, gilt

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(Rr \sin t)^2 + (R \cos t)^2 + h^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + h^2} dt = 2\pi \sqrt{R^2 + h^2}.$$

Beispiel 143 (Ellipse). Mit der Parametrisierung $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)^T$ für $t \in [0, 2\pi]$ der Ellipse $\{x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\}$ ($b > a$) gilt

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \sin t)^2 + (b \cos t)^2} dt = b \int_0^{2\pi} \sqrt{-\frac{b^2 - a^2}{b^2} \sin^2 t + 1} dt.$$

Dies ist ein elliptisches Integral zweiter Art und kann nur mit Hilfe einer Reihenentwicklung berechnet werden.

7.1.2. *Flächen.*

Definition 42. Eine **Fläche** ist das Bild $\vec{\Phi}(D)$ einer Abbildung $\vec{\Phi} : \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^3$, wobei D eine messbare Menge ist. Die Fläche heißt **glatt**, wenn $\vec{\Phi}$ eine stetig differenzierbare Abbildung ist und $D\vec{\Phi}$ in jedem Punkt **Rank 2** hat. Die Abbildung $\vec{\Phi} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt **Parametrisierung** der Fläche $\vec{\Phi}(D)$, wenn $\vec{\Phi}$ stetig differenzierbar, bijektiv auf dem Inneren D° und $D\vec{\Phi}$ für alle Punkte in D maximalen Rang hat.

Eine Fläche S heißt **stückweise glatt**, wenn endlich viele Parametrisierungen $\vec{\Phi}_j : D_j \rightarrow \mathbb{R}^3$ glatter Flächen $S_j = \vec{\Phi}_j(D_j)$ existieren, so dass $S = \cup_j S_j$ und $\vec{\Phi}_j(D_j^\circ) \cap \vec{\Phi}_k(D_k^\circ) = \emptyset$ für alle $j \neq k$.

Sphäre, Ebene, Zylindermantel, Paraboloid, Kegel und Graphen glatter Funktionen zweier Veränderlicher sind Beispiele glatter Flächen in \mathbb{R}^3 .

Beispiel 144 (Zylinder). Die Oberfläche des Zylinders mit Höhe h besteht aus drei glatten Flächen, dem Zylindermantel $\vec{\Phi}(\phi, z) = (R \cos \phi, R \sin \phi, z)^T$ mit $\phi \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, h]$, dem Deckel mit $\vec{\Phi}(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi, h)^T$ mit $r \in [0, R]$, $\phi \in [0, 2\pi]$ und dem Boden mit $\vec{\Phi}(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi, 0)^T$ mit $r \in [0, R]$, $\phi \in [0, 2\pi]$.

Definition 43. Es sei $\vec{\Phi} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung einer glatten Fläche. Dann ist der **Oberflächeninhalt** $O(S)$ der Fläche $\vec{\Phi}(D) = S$ der Wert

$$O(\vec{\Phi}) = O(S) = \int_D \left| \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v) \right| d(u, v).$$

Der Flächeninhalt einer stückweisen glatten Fläche ist die Summe der Flächeninhalte der glatten Teilflächen, aus denen sie zusammengesetzt ist.

Auch diese Definition ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung. Der Vektor

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v)$$

steht senkrecht zur Fläche S im Punkt $\vec{\Phi}(u, v)$, er ist ein Normalenvektor, und hat den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Tangentialvektoren

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) \text{ und } \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v)$$

aufgespannt wird. Dieses Parallelogramm ist das Bild eines tangentialen Einheitsquadrats an D im Punkt $(u, v)^T$ unter der Abbildung $D\vec{\Phi}$.

Beispiel 145 (Kugeloberfläche). Die Abbildung $\vec{\Phi}(\phi, \psi) = (R \cos \phi \cos \psi, R \sin \phi \cos \psi, R \sin \psi)^T$ mit $\phi \in [0, 2\pi]$, $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$ ist eine Parametrisierung der Oberfläche S der Kugel mit Radius R . Es gilt

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \phi}(\phi, \psi) = \begin{pmatrix} -R \sin \phi \cos \psi \\ R \cos \phi \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \psi}(\phi, \psi) = \begin{pmatrix} -R \cos \phi \sin \psi \\ -R \sin \phi \sin \psi \\ R \cos \phi \end{pmatrix}$$

und damit wegen $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = \cos^2 \psi + \sin^2 \psi = 1$

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \phi}(\phi, \psi) \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \psi}(\phi, \psi) = \begin{pmatrix} R^2 \cos \phi \cos^2 \psi \\ R^2 \sin \phi \cos^2 \psi \\ R^2 \sin \psi \cos \psi \end{pmatrix}, \quad \left| \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \phi}(\phi, \psi) \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \psi}(\phi, \psi) \right| = R^2 \cos \psi.$$

Es folgt

$$O(S) = \int_{[0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]} R^2 \cos \psi d(\phi, \psi) = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos \psi d\psi d\phi = 4\pi R^2.$$

7.1.3. Flächeninhalt von Gebieten in \mathbb{R}^2 , die von Kurven begrenzt werden. Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Kurve in \mathbb{R}^2 mit $\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$ und $x'(t) > 0$ und $y(t) \geq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Wir betrachten die Menge

$$S = \{(x(t), y)^T : t \in [a, b], 0 \leq y \leq y(t)\},$$

also die Fläche zwischen der x -Achse und der Kurve γ . Betten wir die xy -Ebene in den \mathbb{R}^3 ein, so ist die Fläche S durch $\vec{\Phi}(t, \eta) = (x(t), \eta, 0)^T$ mit $t \in [a, b]$ und $\eta \in [0, y(t)]$ parametrisiert. Es gilt

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x'(t) \end{pmatrix}$$

und damit

$$O(S) = \int_a^b \int_0^{y(t)} |x'(t)| d\eta dt = \int_a^b \int_0^{y(t)} x'(t) d\eta dt = \int_a^b x'(t)y(t) dt.$$

Beispiel 146 (Halbkreis). Der Halbkreis S ist von der x -Achse und der Kurve $\gamma(t) = (R \cos t, -R \sin t)^T$ mit $t \in [\pi, 2\pi]$ begrenzt. Es folgt

$$O(S) = \int_{\pi}^{2\pi} (-R \sin t)(-R \sin t) dt = R^2 \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 t dt = \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{2} R^2.$$

Es sei γ eine Kurve mit $\gamma(\phi) = (r(\phi) \cos \phi, r(\phi) \sin \phi)^T$ mit $\phi \in [a, b]$ und $r(\phi) \geq 0$ für alle ϕ . Wir betrachten die Fläche $S = \{(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)^T : \phi \in [a, b], \rho \in [0, r(\phi)]\}$, also die Fläche, die von der Kurve γ und den Strahlen $\{(r \cos \alpha, r \sin \alpha)^T : r \in \mathbb{R}^{\geq 0}\}$ und $\{(r \cos \beta, r \sin \beta)^T : r \in \mathbb{R}^{\geq 0}\}$ begrenzt wird. Betten wir die xy -Ebene in den \mathbb{R}^3 ein, so ist die Fläche S durch $\vec{\Phi}(\rho, \phi) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, 0)^T$ mit $\phi \in [a, b]$ und $\rho \in [0, r(\phi)]$ parametrisiert. Es gilt

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -\rho \sin \phi \\ \rho \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho^2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$O(S) = \int_a^b \int_0^{r(\phi)} \rho d\rho d\phi = \int_a^b \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_{\rho=0}^{\rho=r(\phi)} d\phi = \int_a^b \frac{r(\phi)^2}{2} d\phi.$$

Beispiel 147 (Halbkreis in Polarkoordinaten). Mit $\alpha = 0$, $\beta = \pi$ und $r(\phi) = R$ ergibt sich als Fläche S der Halbkreis. Es folgt $O(S) = \frac{1}{2} \int_0^\pi R^2 d\phi = \pi R^2/2$.

Beispiel 148 (Spirale). Die Archimedische Spirale ist die Kurve $\gamma(t) = t(\cos t, \sin t)^T$ mit $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$ und $r(\phi) = \phi$ ergibt sich für die umrundete Fläche S der Flächeninhalt $O(S) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \phi^2 d\phi = 4\pi^3/6$.

7.2. Vektorfelder.

Definition 44. Ein **Vektorfeld** ist eine Abbildung $\vec{v} : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Ein Vektorfeld \vec{v} ordnet jedem Punkt $\vec{x} \in D$ einen Vektor $\vec{v}(\vec{x})$ zu.

7.2.1. *Beispiele für Vektorfelder.* Vektorfelder treten auf als Kraftfelder, elektrische Felder z.B. eines Plattenkondensators oder einer Punktladung, magnetische Felder, z.B. einer Spule, Gradientenfelder $\vec{v}(\vec{x}) = (\text{grad } f)_{\vec{x}}$ einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, als Menge von Tangentialvektoren $\vec{v}(\vec{x}) = \dot{\gamma}(t)$ zu einer Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x} = \gamma(t)$ oder als Menge von Normalenvektoren $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{\Phi}_u \times \vec{\Phi}_v$ einer parametrisierten Fläche $\vec{\Phi} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\vec{x} = \vec{\Phi}(u, v)$.

7.2.2. *Darstellung von Vektorfeldern.* Für ein Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^2$ kann man zu einer diskreten Menge von Argumenten $\{\vec{x}_j\} \subset D$ die Vektoren $\vec{v}(\vec{x}_j)$ mit Fußpunkt \vec{x}_j zeichnen. Oft werden Vektorfelder auch durch Feldlinien dargestellt.

Definition 45. Es seien $\vec{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld und $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Eine **Feldlinie** des Vektorfeldes \vec{v} durch \vec{x}_0 ist eine Kurve $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $0 \in (a, b)$, $\gamma(0) = \vec{x}_0$ und $\dot{\gamma}(t) = \vec{v}(\gamma(t))$.

Ein Vektorfeld ist in jedem Punkt \vec{x}_0 tangential an die Feldlinie durch diesen Punkt.

7.2.3. *Existenz von Feldlinien.* Die lokale Existenz von Feldlinien zu einem gegebenen differenzierbaren Vektorfeld \vec{v} folgt aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, denn die Feldlinie γ ist die Lösung der Differentialgleichung $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{v}(\vec{x})$ mit Anfangswert $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$. Falls \vec{v} eine lineare Abbildung ist, dies entspricht linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen, so existieren die Feldlinien global, d.h. $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist auf \mathbb{R} definiert.

Beispiel 149. Es sei \vec{v} ein lineares Vektorfeld auf \mathbb{R}^2 . Durch Wahl einer geeigneten Basis gilt $\vec{v}(x, y) = (\lambda x, \mu y)^T$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^{\neq 0}$ oder $\vec{v}(x, y) = (ax - by, bx + ay)^T$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

7.3. Kurvenintegral - Zirkulation eines Vektorfeldes entlang einer Kurve.

Das Kurvenintegral sammelt in jedem Punkt $\gamma(t)$ einer Kurve γ den Anteil des Vektors $\vec{v}(\gamma(t))$ ein, der in Richtung der Kurve γ liegt, also tangential zu Kurve verläuft.

Definition 46. Es sei $\vec{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld und $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung der Kurve $\gamma([a, b])$. Dann ist die **Zirkulation** des Vektorfeldes \vec{v} entlang der Kurve γ der Wert

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{x} = \int_a^b \langle \vec{v}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt.$$

Bemerkung 30. Aus der Eigenschaft $\dot{\gamma}(t) \neq \vec{0}$ für alle t folgt, dass in jedem Punkt der Kurve der Einheitstangentenvektor $\dot{\gamma}(t)/|\dot{\gamma}(t)|$ existiert. Der Integrand ist also

$$\langle \vec{v}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = \left\langle \vec{v}(\gamma(t)), \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} \right\rangle |\dot{\gamma}(t)|$$

Das Kurvenintegral ist unabhängig von der Geschwindigkeit der gewählten Parametrisierung, aber die Durchlaufrichtung der Kurve muss beachtet werden. Umkehr der Durchlaufrichtung führt zum entgegengesetzten Vorzeichen beim Kurvenintegral.

Beispiel 150. Wir berechnen die Zirkulation des Vektorfeldes $\vec{v}(x, y) = (-y, x)^T$ entlang des Weges $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$ mit $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ (Halbkreis) und entlang des Weges $\sigma(t) = (0, t)^T$ mit $t \in [-1, 1]$. Beide Wege führen von $(0, -1)^T$ zu $(0, 1)^T$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{x} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle \vec{v}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle \vec{v}(\cos t, \sin t), (-\sin t, \cos t)^T \rangle dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle (-\sin t, \cos t)^T, (-\sin t, \cos t)^T \rangle dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dt = \pi \\ \int_{\sigma} \vec{v} \cdot d\vec{x} &= \int_{-1}^1 \langle \vec{v}(\sigma(t)), \dot{\sigma}(t) \rangle dt \\ &= \int_{-1}^1 \langle \vec{v}(0, t), (0, 1)^T \rangle dt \\ &= \int_{-1}^1 \langle (-t, 0)^T, (0, 1)^T \rangle dt = \int_{-1}^1 0 dt = 0. \end{aligned}$$

Kehren wir die Durchlaufrichtung des Weges γ um, so betrachten wir die Parametrisierung $\gamma_-(t) = (\cos t, -\sin t)^T$ und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_-} \vec{v} \cdot d\vec{x} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle \vec{v}(\gamma_-(t)), \dot{\gamma}_-(t) \rangle dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle \vec{v}(\cos t, -\sin t), (-\sin t, -\cos t)^T \rangle dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle (\sin t, \cos t)^T, (-\sin t, -\cos t)^T \rangle dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -1 dt = -\pi. \end{aligned}$$

Beispiel 151. Nun berechnen wir die Zirkulation des Vektorfeldes $\vec{w}(x, y) = (x, y)^T$ entlang der Wege γ und σ . Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{w} \cdot d\vec{x} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle \vec{w}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle \vec{w}(\cos t, \sin t), (-\sin t, \cos t)^T \rangle dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle (\cos t, \sin t)^T, (-\sin t, \cos t)^T \rangle dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 0 dt = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \vec{v} \cdot d\vec{x} &= \int_{-1}^1 \langle \vec{v}(\sigma(t)), \dot{\sigma}(t) \rangle dt \\ &= \int_{-1}^1 \langle \vec{v}(0, t), (0, 1)^T \rangle dt \\ &= \int_{-1}^1 \langle (0, t)^T, (0, 1)^T \rangle dt = \int_{-1}^1 t dt = 0. \end{aligned}$$

Beide Kurvenintegral stimmen überein. Auch für das Kurvenintegral entlang des Weges

$$\kappa(t) = \begin{cases} (t, -1)^T & 0 \leq t \leq 1 \\ (1, t-2)^T & 1 \leq t \leq 3 \\ (4-t, 1)^T & 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

verschwindet, denn

$$\begin{aligned} \int_{\kappa} \vec{v} \cdot d\vec{x} &= \int_0^4 \langle \vec{v}(\kappa(t)), \dot{\kappa}(t) \rangle dt \\ &= \int_0^1 \langle \vec{v}(t, -1), (1, 0)^T \rangle dt + \int_1^3 \langle \vec{v}(1, t-2), (0, 1)^T \rangle dt \\ &\quad + \int_3^4 \langle \vec{v}(4-t, 1), (-1, 0)^T \rangle dt \\ &= \int_0^1 t dt + \int_1^3 t-2 dt + \int_3^4 t-4 dt = \int_0^1 t dt + \int_{-1}^1 s ds + \int_{-1}^0 s ds = 0 \end{aligned}$$

Dies ist kein Zufall, denn $\vec{w} = \text{grad } f$ mit $f(x, y) = (x^2 + y^2)/2$.

7.4. Rotation und Gradientenfelder.

Definition 47. Ein Vektorfeld $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Gradientenfeld**, falls eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = \text{grad } f$ existiert. Die Funktion f heißt dann **Potential** des Vektorfeldes \vec{v} .

Es gilt

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{x} = \int_a^b \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt = \int_a^b \frac{d(f \circ \gamma)(t)}{dt} dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Wenn \vec{v} ein Gradientenfeld ist, so hängt das Kurvenintegral von \vec{v} nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab.

Definition 48. Es sei $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ ein differenzierbares Vektorfeld. Die **Rotation** des Vektorfeldes ist ein Vektorfeld $\text{rot } \vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$(\text{rot } \vec{v}) = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, -\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^T.$$

Wenn $(\text{rot } \vec{v})(\vec{x}) \neq \vec{0}$, so hat \vec{v} im Punkt \vec{x} ein **Wirbel** mit Drehachse $(\text{rot } \vec{v})(\vec{x})$. Wenn $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$, so heißt das Vektorfeld \vec{v} **wirbelfrei**.

Die Länge des Vektors $(\text{rot } \vec{v})(\vec{x})$ ist ein Maß für die Stärke des Wirbels. Die Rotation eines Vektorfeldes $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ berechnet man durch Identifikation des \mathbb{R}^2 mit der Ebene $\{x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, d.h. $v_3 \equiv 0$ und v_1 und v_2 hängen nicht von x_3

ab. In dem Fall verschwinden die erste und zweite Komponente des Vektors $\text{rot } \vec{v}$ und man notiert nur die dritte Komponente.

Beispiel 152 (Ortsvektorfeld). Wenn $\vec{v}(x, y) = (x, y)^T$, dann $\text{rot}(\vec{v}) = \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} = 0$.

Wenn $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{x}$, dann $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$, da $\frac{\partial x_j}{\partial x_k} = 0$ für $j \neq k$.

Beispiel 153. Das Vektorfeld $\vec{v}(x, y) = (-y, x)^T$ hat die Rotation $\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial -y}{\partial y} = 2$, besitzt also in jedem Punkt einen Wirbel.

Beispiel 154 („ $d\phi$ “). Das Vektorfeld $\vec{v}(x, y) = (-y/r^2, x/r^2)^T$ mit $r^2 = x^2 + y^2$ ist nur auf $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ definiert. Dort gilt

$$(\text{rot } \vec{v})(x, y) = \left(\frac{x}{r^2}\right)_x - \left(-\frac{y}{r^2}\right)_y = \frac{1}{r^2} - \frac{x}{r^4} 2x + \frac{1}{r^2} - \frac{y}{r^4} 2y = 0.$$

Das Vektorfeld ist wirbelfrei auf D .

Satz 57 (Poincarésches Lemma). *Es sei $D = [\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^3$ ein Quader. Ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist genau dann ein Gradientenfeld, wenn es wirbelfrei ist, d.h. $\text{rot } \vec{v} \equiv \vec{0}$.*

Beweis. Wenn $\vec{v} = \text{grad } f$, dann gilt $v_j = f_{x_j}$. Da \vec{v} stetig differenzierbar ist, kann man die Reihenfolge der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung der Funktion f vertauschen, also

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = f_{x_j x_k} - f_{x_k x_j} = 0.$$

Die Komponenten der Rotation sind, bis auf das Vorzeichen, genau diese Ausdrücke.

Wenn $\text{rot } \vec{v} \equiv \vec{0}$, so konstruieren wir eine Stammfunktion f . Dazu wählen wir einen Bezugspunkt $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T \in D$. Für $\vec{x} = (x, y, z)^T \in D$ betrachten wir die aus den drei Strecken

$$\gamma_x(t) = \begin{pmatrix} t \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, x_0 \leq t \leq x, \quad \gamma_y(t) = \begin{pmatrix} x \\ t \\ z_0 \end{pmatrix}, y_0 \leq t \leq y, \quad \gamma_z(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}, z_0 \leq t \leq z$$

zusammengesetzten Weg γ und definieren

$$f(\vec{x}) := \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{x} = \int_{x_0}^x v_1(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y v_2(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z v_3(x, y, t) dt.$$

Man prüft, dass $\vec{v} = \text{grad } f$ gilt. Mit Hilfe der Formel für die Ableitung parameterabhängiger Integrale erhält man zum Beispiel

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= v_1(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial v_2}{\partial x}(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z \frac{\partial v_3}{\partial x}(x, y, t) dt \\ &= v_1(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial v_1}{\partial y}(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z \frac{\partial v_1}{\partial z}(x, y, t) dt \\ &= v_1(x, y_0, z_0) + [v_1(x, t, z_0)]_{t=y_0}^{t=y} + [v_1(x, y, t)]_{t=z_0}^{t=z} = v_1(x, y, z), \end{aligned}$$

da $\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}$ und $\frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial v_3}{\partial x}$ in einem wirbelfreien Vektorfeld. \square

Definition 49. *Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend, wenn sich jede stetige Kurve $h_0 : [0, 1] \rightarrow D$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = \vec{x}_0$ in D zu einer konstanten Abbildung $h_1 : [0, 1] \rightarrow D$ mit $h_1(t) = \vec{x}_0$ zusammenziehen läßt.*

Beispiel 155 (einfach zusammenhängende Mengen). \mathbb{R}^n , abgeschlossene Intervalle, ε -Umgebungen, Kugeloberfläche bzw. -schale

Beispiel 156 (nicht einfach zusammenhängende Mengen). Kreisring, $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$, Komplement von Kreisscheiben in \mathbb{R}^2 , Hohlzylinder (Rohr), Torus (Schwimmring)

Satz 58. *Es seien D ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld.*

Das Vektorfeld \vec{v} ist genau dann ein Gradientenfeld, wenn es wirbelfrei ist.

Das Vektorfeld \vec{v} ist genau dann ein Gradientenfeld, wenn für alle Kurven $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ gilt $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{x} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

Wenn ein Vektorfeld \vec{v} ein Potential besitzt, also eine Funktion f mit $\vec{v} = \text{grad } f$, so kann man diese Funktion f bestimmen, indem man das System der partiellen Differentialgleichungen $v_j = f_{x_j}$ löst.

Beispiel 157. Das Vektorfeld $\vec{v}(x, y) = (x, y)^T$ ist wirbelfrei auf der einfach zusammenhängenden Menge \mathbb{R}^2 und besitzt deshalb ein Potential f . Aus den Gleichungen $f_x(x, y) = v_1(x, y) = x$ und $f_y(x, y) = v_2(x, y) = y$ folgt erst $f(x, y) = x^2/2 + g(y)$, dann $f_y(x, y) = g'(y) = y$, also $g(y) = y^2/2 + c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f(x, y) = (x^2 + y^2)/2 + c$ ist also die allgemeine Form des Potentials des Vektorfeldes \vec{v} .

Beispiel 158. Das Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x}) = r^{-3}\vec{x}$ mit $r = |\vec{x}|$ ist auf der einfach zusammenhängenden Menge $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ definiert und wirbelfrei, da für $j \neq k$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_k} = x_j \frac{\partial r^{-3}}{\partial x_k} = x_j (-3)r^{-4} \frac{\partial r}{\partial x_k} = -3r^{-5} x_j x_k.$$

Ein Potential f von \vec{v} erfüllt für $j = 1, 2, 3$ die Gleichungen $f_{x_j}(\vec{x}) = x_j r^{-3}$. Für $j = 1$ erhält man $f(\vec{x}) = -r^{-1} + g(x_2, x_3)$, dann $f_{x_2}(\vec{x}) = x_2 r^{-3} + g_{x_2}(x_2, x_3)$, also $g_{x_2} \equiv 0$ und damit $g(x_2, x_3) = h(x_3)$. Dann folgt $f_{x_3}(\vec{x}) = x_3 r^{-3} + h'(x_3)$, also auch $h' \equiv 0$, d.h. $h(x_3) \equiv c$. Das gesuchte Potential des Vektorfeldes \vec{v} ist die Funktion $f(\vec{x}) = c - 1/r$.

Beispiel 159. Das Vektorfeld $\vec{v} = (x^2 - y^2, -2xy)^T$ ist wirbelfrei auf \mathbb{R}^2 , denn

$$\frac{\partial}{\partial x}(-2xy) = -2y = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2).$$

Also besitzt \vec{v} ein Potential f . Aus den Gleichungen $f_x(x, y) = v_1(x, y) = x^2 - y^2$ und $f_y(x, y) = v_2(x, y) = -2xy$ folgt erst $f(x, y) = x^3/3 - y^2x + g(y)$, dann $f_y(x, y) = -2xy + g'(y) = -2xy$, also $g(y) = c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f(x, y) = x^3/3 - xy^2 + c$ ist also die allgemeine Form des Potentials des Vektorfeldes \vec{v} .

Satz 59. *Wenn $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ auf einer zusammenhängenden Menge D ein Potential besitzt, so ist dieses bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wenn $\vec{v} = \text{grad } f = \text{grad } g$, dann $\text{grad}(f - g) = \vec{0}$ auf einer zusammenhängenden Menge. Daraus folgt, dass $f - g \equiv c$. □

Bemerkung 31. Die additive Konstante entspricht in der Konstruktion des Potentials der Wahl des Bezugspunktes $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$.

7.5. Flächenintegrale - Fluss eines Vektorfeldes durch eine Fläche. Das Flächenintegral sammelt in jedem Punkt $\vec{\Phi}(u, v)$ einer Fläche $S = \vec{\Phi}(D)$ den Anteil des Vektors $\vec{v}(\vec{\Phi}(u, v))$ ein, der senkrecht zur Fläche S im Punkt $\vec{\Phi}(u, v)$ steht.

Definition 50. Es sei $\vec{\Phi} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung einer glatten Fläche $S = \vec{\Phi}(D)$ und $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Dann ist der **Fluss** des Vektorfeld \vec{v} durch die Fläche S der Wert

$$\int_{\vec{\Phi}} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} := \int_D \left\langle \vec{v}(\vec{\Phi}(u, v)), \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v) \right\rangle d(u, v)$$

Bemerkung 32. Da die Ableitung $D\vec{\Phi}$ Parametrisierung $\vec{\Phi}$ in jedem Punkt maximalen Rang, also Rang 2 hat, verschwindet der Normalenvektor

$$\vec{n}(\vec{\Phi}(u, v)) = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v)$$

in keinem Punkt so dass für alle $(u, v)^T \in D$ der Einheitsnormalenvektor

$$\frac{\vec{n}(\vec{\Phi}(u, v))}{|\vec{n}(\vec{\Phi}(u, v))|}$$

existiert.

In jedem Punkt $\vec{x} \in S$ einer glatten Fläche S gibt es genau zwei Einheitsnormalenvektoren, d.h. Vektoren der Länge 1, die senkrecht auf der Fläche stehen. Die Wahl/Vorgabe eines dieser beiden ist die **Orientierung** der Fläche S . Man muss eine orientierte Fläche so parametrisieren, dass $\vec{n}(\vec{\Phi}(u, v))/|\vec{n}(\vec{\Phi}(u, v))|$ für alle $(u, v)^T \in D$ dieser vorgegebene Vektor ist.

Ist eine Fläche aus mehreren glatten Flächenstücken zusammengesetzt, so wählt man die Parametrisierungen der einzelnen Flächenstücke so, dass die Orientierungen zusammenpassen und der Fluß durch die Gesamtfläche ist die Summe der Flüsse durch die einzelnen Flächenstücke.

Beispiel 160 (Fluß des Ortsvektorfeldes durch die Kugeloberfläche). Wir berechnen den Fluß des Vektorfeldes $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{x}$ durch die Oberfläche S der Kugel mit Radius R , deren Einheitsnormalenvektor nach außen zeigt. Für die Parametrisierung der Fläche S durch

$$\vec{\Phi}(\phi, \psi) = (R \cos \phi \cos \psi, R \sin \phi \cos \psi, R \sin \psi)^T \text{ mit } \phi \in [0, 2\pi], \psi \in [-\pi/2, \pi/2]$$

gilt

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -R \sin \phi \cos \psi \\ R \cos \phi \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \psi} = \begin{pmatrix} -R \cos \phi \sin \psi \\ -R \sin \phi \sin \psi \\ R \cos \psi \end{pmatrix}$$

und

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \phi}(\phi, \psi) \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \psi}(\phi, \psi) = \begin{pmatrix} R^2 \cos \phi \cos^2 \psi \\ R^2 \sin \phi \cos^2 \psi \\ R^2 \sin \psi \cos \psi \end{pmatrix} = R \cos \psi \vec{\Phi}(\phi, \psi),$$

wobei der Normalenvektor immer in die gleiche Richtung wie der Ortsvektor $\vec{\Phi}(\phi, \psi)$ zeigt, weil $R \cos \psi > 0$. Nun gilt

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\Phi}} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle \vec{v}(\vec{\Phi}(\phi, \psi)), R \cos \psi \vec{\Phi}(\phi, \psi) \rangle d\psi d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R \cos \psi \langle \vec{\Phi}(\phi, \psi), \vec{\Phi}(\phi, \psi) \rangle d\psi d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R \cos \psi \left| \vec{\Phi}(\phi, \psi), \vec{\Phi}(\phi, \psi) \right|^2 d\psi d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R \cos \psi R^2 d\psi d\phi = R^3 \int_0^{2\pi} [\sin \psi]_{\psi=-\pi/2}^{\psi=\pi/2} d\phi = 4\pi R^3. \end{aligned}$$

Der Fluß des Ortsvektorfeldes durch die Kugeloberfläche ist $4\pi R^3$. Dies ist das Dreifache des Kugelvolumens und 3 ist die Spur der Matrix $D\vec{v}$.

7.6. Integralsätze von Stokes und Green. Wir betrachten die Fläche $S = \{(x, y, 0)^T : 0 \leq x, y \leq 1\}$, also ein Quadrat in der xy -Ebene. Mit der Parametrisierung $\vec{\Phi}(x, y) = (x, y, 0)^T$ für $x, y \in [0, 1]$ erhält man den Einheitsnormalenvektor

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Fluß eines Vektorfeldes $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$ durch die Fläche S ist

$$\int_{\vec{\Phi}} \vec{w} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{[0,1] \times [0,1]} \left\langle \vec{w}(\vec{\Phi}(x, y)), \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial y} \right\rangle d(x, y) \int_{[0,1] \times [0,1]} w_3(x, y, 0) d(x, y).$$

Wenn \vec{w} ein Wirbelfeld ist, also $\vec{w} = \text{rot } \vec{v}$ für ein Vektorfeld $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$, dann

$$w_3 = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}.$$

Nun folgt

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\Phi}} \vec{w} \cdot d\vec{\sigma} &= \int_{[0,1] \times [0,1]} \frac{\partial v_2}{\partial x}(x, y, 0) - \frac{\partial v_1}{\partial y}(x, y, 0) d(x, y) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial v_2}{\partial x}(x, y, 0) dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial v_1}{\partial y}(x, y, 0) dy dx \\ &= \int_0^1 [v_2(x, y, 0)]_{x=0}^{x=1} dy - \int_0^1 [v_1(x, y, 0)]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 v_2(1, y, 0) dy - \int_0^1 v_2(0, y, 0) dy - \int_0^1 v_1(x, 1, 0) dx + \int_0^1 v_1(x, 0, 0) dx \\ &= \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{x} + \int_{-\gamma_4} \vec{v} \cdot d\vec{x} + \int_{-\gamma_3} \vec{v} \cdot d\vec{x} + \int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{x} = \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{x} \end{aligned}$$

mit $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$ ein Weg der aus vier glatten Teilkurven besteht und

$$\gamma_1(t) = (t, 0, 0)^T, \dot{\gamma}(t) = (1, 0, 0)^T, t \in [0, 1]$$

$$\gamma_2(t) = (1, t, 0)^T, \dot{\gamma}(t) = (0, 1, 0)^T, t \in [0, 1]$$

$$\gamma_3(t) = (t, 1, 0)^T, \dot{\gamma}(t) = (1, 0, 0)^T, t \in [0, 1]$$

$$\gamma_4(t) = (0, t, 0)^T, \dot{\gamma}(t) = (0, 1, 0)^T, t \in [0, 1]$$

Dies ist die einfachste Form der Integralsätze von Stokes und Green, die den Fluß des Wirbelfeldes durch eine Fläche mit der Zirkulation des Feldes entlang des Randes der Fläche verbinden. Der Integralsatz von Green formuliert diesen Sachverhalt für Flächen in \mathbb{R}^2 , der Integralsatz von Stokes für Flächen in \mathbb{R}^3 .

Satz 60 (Integralsatz von Green). *Es seien $S \subset \mathbb{R}^2$ eine stückweise glatte Fläche mit stückweise glattem Rand ∂S und $\vec{v} = (v_1, v_2)^T : \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_S \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \int_S \frac{\partial v_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial v_1}{\partial y}(x, y) d(x, y) = \int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{x},$$

wobei der Rand ∂S so parametrisiert ist, dass die Fläche S beim Durchlaufen des Randes immer links liegt.

Bemerkung 33. Wenn in der Umgebung U eines Punktes $\vec{x} \in \partial S$ die Fläche S mit Hilfe einer Funktion $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ als $S \cap U = \{\vec{x} \in U : \phi(\vec{x}) < 0\}$ gegeben ist, dann muss der Rand ∂S so durch eine Kurve γ parametrisiert sein, dass die Determinante der $(2, 2)$ -Matrix $((\text{grad } \phi)_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t))$ positiv ist.

Satz 61 (Integralsatz von Stokes). *Es seien $S \subset \mathbb{R}^3$ eine stückweise glatte Fläche mit stückweise glattem Rand ∂S und $\vec{v} : \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_S \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{x},$$

wobei die Parametrisierungen des Randes $\partial S = \vec{\Phi}(\gamma([a, b]))$ und der Fläche $S = \vec{\Phi}(D)$ durch eine verträglichen Orientierung des Randes $\partial D \subset \bar{D} \subset \mathbb{R}^2$ durch eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \partial D$ (siehe Integralsatz von Green) gegeben ist.

Bemerkung 34. Denken Sie bei der Wahl der richtigen Orientierung an die „rechte Hand drei Finger Regel“ (Daumen = Normalenvektor, Zeigefinger = Tangentialvektor und Mittelfinger zeigt in die Fläche hinein) oder an die „rechte Hand Regel“ (gekrümmte Finger durchlaufen den Rand und Daumen gibt Normalenvektor an).

Beweis. Beide Integralsätze lassen sich mit Hilfe von Koordinatentransformation und der Zerlegung der Eins erst auf glatte Flächen und dann auf den von uns bewiesenen Fall $S = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ zurückführen. \square

Folgerung 16 (Kein Wirbelfluß durch geschlossene Flächen). *Wenn $\partial S = \emptyset$, dann $\int_S \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = 0$.*

Folgerung 17 (Flächenunabhängigkeit des Wirbelflusses). *Wenn S_0, S_1 mit $\partial S_0 = \partial S_1$ mit gleicher Durchlaufrichtung, dann $\int_{S_0} \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{S_1} \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$.*

Bemerkung 35. Die Zirkulation von Gradientenfeldern hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab. Der Fluß von Wirbelfeldern hängt nur vom Rand der Kurve ab.

7.7. Divergenz - Charakterisierung von Wirbelfeldern. Wir haben gesehen, dass der Fluß eines Wirbelfeldes $\vec{w} = \text{rot } \vec{v}$ durch geschlossene, auch sehr kleine, Flächen verschwindet. Das infinitesimale Maß für diesen Fluß ist die Divergenz.

Definition 51. Die **Divergenz** eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)^T : \mathbb{R}^3 \supset G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist die Funktion $\text{div } \vec{w} : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(\text{div } \vec{w})(\vec{x}) = \frac{\partial w_1}{\partial x}(\vec{x}) + \frac{\partial w_2}{\partial y}(\vec{x}) + \frac{\partial w_3}{\partial z}(\vec{x}).$$

Wenn $\text{div } \vec{w}(\vec{x}) > 0$, so heißt \vec{x} **Quelle**, und wenn $\text{div } \vec{w}(\vec{x}) < 0$, so heißt \vec{x} **Senke**. Ein Vektorfeld heißt **quellenfrei**, wenn $\text{div } \vec{w} \equiv 0$.

Lemma 17. Wirbelfelder sind quellenfrei, d.h. $\text{div rot } \vec{v} = 0$ für alle Vektorfelder $\vec{v} \in \mathcal{C}^2$.

Beweis. Wenn $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$, dann gilt

$$\text{rot } \vec{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, -\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

und, weil man die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschen kann,

$$\text{div rot } \vec{v} = \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3 \partial x_2} = 0.$$

□

Beispiel 161 (Ortsvektorfeld). Wenn $\vec{w}(\vec{x}) = \vec{x}$, dann $\text{div } \vec{w} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$.

Beispiel 162 (Konstantes Feld). Wenn $\vec{w}(\vec{x}) = \vec{a}$ für einen festen Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, dann $\text{div } \vec{w} = 0$.

Beispiel 163 (Elektrisches Feld einer Punkladung). Das Feld $\vec{w}(\vec{x}) = r^{-3}\vec{x}$ mit $r = |\vec{x}|$ ist auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ quellenfrei, denn $(\partial r)/(\partial x_j) = x_j/r$ und

$$\text{div } \vec{w} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_j}{r^3} = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{r^3} - 3 \frac{x_j}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{3}{r} - \frac{3}{r^5} \sum_{j=1}^3 x_j^2 = 0.$$

Beispiel 164 (Koordinatenpermutation). Das Vektorfeld $\vec{w}(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1)^T$ ist quellenfrei, denn $(\partial x_j)/(\partial x_k) = 0$ für $j \neq k$.

Satz 62 (Existenz eines Vektorpotentials). Es sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein zusammenziehbares Gebiet. Ein Vektorfeld $\vec{w} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist genau dann ein Wirbelfeld, wenn $\text{div } \vec{w} \equiv 0$ auf G .

Beweis. Wir haben bereits gezeigt, dass aus $\vec{w} = \text{rot } \vec{v}$ für beliebige Definitionsgebiete $\text{div } \vec{w} = 0$ folgt.

Wenn $\text{div } \vec{w} \equiv 0$ auf G , so kann man ein Vektorpotential durch Integration definieren. Wenn G sternförmig bezüglich $\vec{0}$, so ist

$$\vec{v}(\vec{x}) := \int_0^1 t \vec{w}(t\vec{x}) \times \vec{x} dt$$

für alle $\vec{x} \in G$ wohldefiniert und es gilt

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{v}(\vec{x}) &= \int_0^1 t \text{rot } (\vec{w}(t\vec{x}) \times \vec{x}) dt = \int_0^1 t(2\vec{w}(t\vec{x}) + t(D\vec{w})_{t\vec{x}}\vec{x}) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (t^2 \vec{w}(t\vec{x})) dt = [t^2 \vec{w}(t\vec{x})]_0^1 = \vec{w}(\vec{x}). \end{aligned}$$

□

Beispiel 165 (Potential des konstanten Feldes). Es gilt

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{2} \vec{a} \times \vec{x} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{rot} (a_2 x_3 - a_3 x_2, -a_1 x_3 + a_3 x_1, a_1 x_2 - a_2 x_1)^T = \vec{a}.$$

Zwei Vektorpotentiale auf einer einfach zusammenhängenden Menge unterscheiden sich höchstens um ein Gradientenfeld.

Satz 63 (Eindeutigkeit des Vektorpotentials). *Wenn $\vec{w} = \operatorname{rot} \vec{v}_0 = \operatorname{rot} \vec{v}_1$ auf einer einfach zusammenhängenden Menge, dann existiert eine Funktion f mit $\vec{v}_0 - \vec{v}_1 = \operatorname{grad} f$.*

Beweis. Einerseits gilt $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$ für alle $f \in C^2$. Andererseits folgt aus $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ auf einer einfach zusammenhängenden Menge die Existenz einer Potentialfunktion. □

Zur Berechnung eines Vektorpotentials kann man die partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} = w_1, \quad -\frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial z} = w_2, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = w_3$$

lösen. Da aber \vec{v} nur bis auf ein Gradientenfeld $\operatorname{grad} f$ eindeutig bestimmt ist, können wir $v_1 \equiv 0$, $v_2(x_0, y, z) = 0$ und $v_3(x_0, y_0, z) = 0$ für eine Bezugsgerade $\{(x_0, y_0, z)^T\}$ annehmen. Dies vereinfacht das zu lösende System von partiellen Gleichungen zu

$$\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} = w_1, \quad -\frac{\partial v_3}{\partial x} = w_2, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} = w_3,$$

also $v_2 = \int_{x_0}^x w_3 dx$, $v_3 = -\int w_2 dx + g(y, z)$ und $g_y(y, z) = w_1$. Dann folgt $g(y, z) = \int_{y_0}^y w_1 dy$.

Beispiel 166. Wir bestimmen ein Vektorpotential des quellenfreien Feldes $\vec{w}(x, y, z) = (z, x, y)^T$. Dazu lösen wir die Differentialgleichungen

$$-\frac{\partial v_3}{\partial x} = x \quad \text{und} \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} = y$$

und erhalten $v_3 = -x^2/2 + g(y, z)$, $v_2 = xy$ und $g_y = z$, also $g(y, z) = yz$ und das Vektorpotential

$$\left(0, xy, -\frac{1}{2}x^2 + yz \right)^T.$$

7.8. Gaußscher Integralsatz.

Satz 64. *Es seien $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit stückweise glattem Rand $S = \partial G$ und $\vec{w} : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_G \operatorname{div} \vec{w}(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\partial G} \vec{w} \cdot d\vec{\sigma},$$

wobei ∂G so orientiert ist, dass der Normalenvektor aus dem Gebiet G heraus zeigt.

Beweis. Der Beweis des Satzes läßt sich durch Zerlegung des Gebietes und Koordinatentransformation auf den Fall $G = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ zurückführen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \int_G \operatorname{div} \vec{w}(\vec{x}) \, d\vec{x} &= \int_{[0,a] \times [0,b] \times [0,c]} \frac{\partial w_1}{\partial x}(\vec{x}) + \frac{\partial w_2}{\partial y}(\vec{x}) + \frac{\partial w_3}{\partial z}(\vec{x}) \, d(x, y, z) \\
 &= \int_{[0,b] \times [0,c]} \int_0^a \frac{\partial w_1}{\partial x}(\vec{x}) \, dx \, d(y, z) + \int_{[0,a] \times [0,c]} \int_0^b \frac{\partial w_2}{\partial y}(\vec{x}) \, dy \, d(x, z) \\
 &\quad + \int_{[0,a] \times [0,b]} \int_0^c \frac{\partial w_3}{\partial z}(\vec{x}) \, dz \, d(x, y) \\
 &= \int_{[0,b] \times [0,c]} w_1(a, y, z) \, d(y, z) - \int_{[0,b] \times [0,c]} w_1(0, y, z) \, d(y, z) \\
 &\quad + \int_{[0,a] \times [0,c]} w_2(x, b, z) \, d(x, z) - \int_{[0,a] \times [0,c]} w_2(x, 0, z) \, d(x, z) \\
 &\quad + \int_{[0,a] \times [0,b]} w_3(x, y, c) \, d(x, y) - \int_{[0,a] \times [0,b]} w_3(x, y, 0) \, d(x, y) \\
 &= \int_{S_{x=a}} \vec{w}(\vec{x}) \cdot d\vec{\sigma} + \int_{S_{x=0}} \vec{w}(\vec{x}) \cdot d\vec{\sigma} \\
 &\quad + \int_{S_{y=b}} \vec{w}(\vec{x}) \cdot d\vec{\sigma} + \int_{S_{y=0}} \vec{w}(\vec{x}) \cdot d\vec{\sigma} \\
 &\quad + \int_{S_{z=c}} \vec{w}(\vec{x}) \cdot d\vec{\sigma} + \int_{S_{z=0}} \vec{w}(\vec{x}) \cdot d\vec{\sigma} \\
 &= \int_S \vec{w}(\vec{x}) \cdot d\vec{\sigma}
 \end{aligned}$$

mit $S = S_{x=a} \cup S_{x=0} \cup S_{y=b} \cup S_{y=0} \cup S_{z=c} \cup S_{z=0}$ und den dazugehörigen Normalenvektoren $(1, 0, 0)^T$, $(-1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$, $(0, -1, 0)^T$, $(0, 0, 1)^T$ und $(0, 0, -1)^T$. \square

Bemerkung 36. Wenn in einer Umgebung U des Punktes $\vec{x} \in \partial G$ das Gebiet G mit Hilfe einer Funktion $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ als $G \cap U = \{\vec{x} \in U : \phi(\vec{x}) < 0\}$ beschrieben wird, dann muss man die Parametrisierung $\vec{\Phi}$ des Randes so wählen, dass

$$\det \left((\operatorname{grad} \phi)_{\vec{\Phi}(u,v)}, \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v) \right) > 0.$$

Wendet man den Gaußschen Integralsatz auf das Ortsvektorfeld $\vec{w}(\vec{x}) = \vec{x}$ an, so ergibt sich

$$3\mu(G) = \int_G \operatorname{div} \vec{w} \, d\vec{x} = \int_{\partial G} \vec{x} \cdot d\vec{\sigma}.$$

Das Volumen des Gebietes G kann mit Hilfe des Flusses des Ortsvektorfeldes durch die Oberfläche ∂G berechnet werden.

Folgerung 18. *Flüsse von quellenfreien Vektorfeldern durch Ränder von Gebieten verschwinden. Wenn $\vec{w} : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\operatorname{div} \vec{w} \equiv 0$, dann gilt $\int_{\partial G} \vec{w} \cdot d\vec{\sigma} = 0$.*

Hierbei ist es wichtig, dass \vec{w} auf G und nicht nur in der Nähe des Randes ∂G quellenfrei ist.

Beispiel 167. Wir berechnen den Fluß des Vektorfeldes $\vec{w}(\vec{x}) = r^{-3}\vec{x}$ mit $r = |\vec{x}|$, welches nur auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ definiert ist, durch die Oberfläche einer Kugel vom Radius R . Das Vektorfeld \vec{w} ist auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ quellenfrei. Trotzdem gilt mit Kugelkoordinaten wie in Beispiel 160

$$\begin{aligned} \int_{\{r=R\}} \vec{w} \cdot d\vec{\sigma} &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle r^{-3}\vec{\Phi}(\phi, \psi), R \cos \psi \vec{\Phi}(\phi, \psi) \rangle d\psi d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^{-3} R \cos \psi R^2 d\psi d\phi = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \psi d\psi d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} 2 d\phi = 4\pi \neq 0. \end{aligned}$$

7.9. Anwendungen in der Elektrodynamik. Die Maxwellschen Gleichungen der Elektrodynamik für das elektrische Feld \vec{E} , das magnetische Feld \vec{B} , die Ladungsdichte ρ und die elektrische Stromdichte \vec{j} lauten:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho, \quad \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \vec{j}.$$

Die Größen \vec{E} , \vec{B} , ρ und \vec{j} hängen vom Ort \vec{x} und von der Zeit t ab. In einem statischen System, d.h. keine Zeitabhängigkeit, ergeben sich ein entkoppeltes System aus je zwei Gleichungen für \vec{E} und \vec{B} , die insbesondere besagen, dass \vec{E} wirbelfrei und \vec{B} quellenfrei ist.

7.9.1. Gesamtladung. Die Gesamtladung $\int_G \rho d\vec{x}$ ist gleich dem Fluß des elektrischen Feldes durch den Rand des Gebietes, denn

$$\int_G \rho d\vec{x} = \int_G \operatorname{div} \vec{E} d\vec{x} = \int_{\partial G} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma}.$$

7.9.2. Existenz eines Vektorpotentials. Das magnetische Feld ist quellenfrei und besitzt ein Vektorpotential, denn $\operatorname{div} \vec{B} = 0$.

7.9.3. Induktionsgesetz. Es gilt

$$\int_A \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{x} = \int_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{\sigma}.$$

Eine zeitliche Veränderung des Flusses des magnetischen Feldes durch eine Fläche A bewirkt eine Zirkulation des elektrischen Feldes entlang des Randes ∂A .

7.9.4. Ladungserhaltung. Aus $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$ folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \vec{j} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} + \operatorname{div} \left(\operatorname{rot} \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right) = 0$$

und damit

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_G \rho d\vec{x} = \int_G \frac{\partial}{\partial t} \rho d\vec{x} = - \int_G \operatorname{div} \vec{j} d\vec{x} = - \int_{\partial G} \vec{j} \cdot d\vec{\sigma},$$

Wenn sich die Gesamtladung in einem Gebiet ändert, so muss Strom durch den Rand des Gebietes fließen.