Beispielklausur „Mathematische Grundlagen der Informatik“

Lösungshinweise / Ergebnisse ohne Gewähr.

1. (5 P.) Erstellen Sie die Wahrheitstabelle zu $((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg q$.
   Lösung: Alle Kombinationen von p und q ergeben 1 (Tautologie).

2. (5 P.) Beweisen Sie folgenden Behauptung: $\forall a, b \in \mathbb{R} \,\text{mit}\, a \neq b : 2ab < a^2 + b^2$
   Lösungshinweis: Gehen Sie von der bekannten Tatsache $\forall a, b \in \mathbb{R} \,\text{mit}\, a \neq b : 0 < (a - b)^2$ aus.

3. (10 P.) Stellen Sie die Zahl $(10000,5)_{10}$ im Oktalsystem und im Dualsystem dar.
   Lösung: $(23420,4)_8$ bzw. $(10011100010000,1)_2$

4. (5 P.) Berechnen Sie $3^{6000} \mathrm{mod} 7$.
   Lösung: 1

5. (8 P.) Eine Multiple-Choice-Klausur besteht aus 6 Fragen mit jeweils 4 Antwortmöglichkeiten, von denen immer nur eine richtig ist. Wie groß ist bei zufälligem Ankreuzen der Antworten die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 3 Fragen richtig beantwortet sind, d.h. die Klausur bestanden wird?
   Lösung: 16,94%

6. (5 P.) Bei einer Bank wurden 20.000 € zu einem Zinssatz von 4% p.a. angelegt. Am Ende wurden 42.136,98 € ausbezahlt. Wie lange wurde das Kapital angelegt?
   Lösung: 19 Jahre

7. (7 P.) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Hinweis: $x = -1$ oder $x = 1$ könnten Nullstellen sein.
   Lösung: $x_1 = 1$ (Probieren), $x_2 = 2$, $x_3 = 3$

8. (5 P.) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \dfrac{e^{x^2} + x}{\sin(x)}$.
   Lösung: $f'(x) = \dfrac{(2xe^{x^2} + 1)\sin(x) - (e^{x^2} + x)\cos(x)}{\sin^2(x)}$

9. (5 P.) Bestimmen Sie die Stammfunktion der Funktion $f(x) = x\cos(x^2)$.
   Lösung: $F(x) = \dfrac{1}{2}\sin(x^2) + C$

10. (5 P.) Bestimmen Sie
    $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x + 1)}$$
    Lösung: π

11. (15 P.) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ und der Vektor $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
    Berechnen Sie A^{-1} und die Lösung des Gleichungssystems $A \cdot x = b$.
    Lösung: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ und $x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

12. (5 P.) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

    Lösung: 0

13. (10 P.) Bestimmen Sie alle Stellen möglicher Extremwerte der Funktion $f(x, y) = x + 2y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.
    Lösung: $\lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$, $x = \mp\frac{1}{\sqrt{5}}$, $y = \mp\frac{2}{\sqrt{5}}$