Math. Grundlagen der Informatik

FOM Hamburg

Formelsammlung (Verwendung in der Klausur)

Potenzregeln:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad und \quad a^0 = 1 \text{ für } a \neq 0$$

$$a^n a^m = a^{n+m},\ a^n b^n = (ab)^n,\ (a^m)^n = a^{mn} \text{ für } a;b \in R \text{ und } m;n \in Z$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad \text{für } a \in R \text{ und } n \in N$$

Binomische Formeln:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Rechenregeln für komplexe Zahlen in der kartesischen Darstellung:

- Addition und Subtraktion:
  $$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$
  $$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

- Multiplikation: $(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

- Division (Mit Erweiterung der komplex konjugierten Zahl des Nenners):
  $$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\cdot\frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}}$$
  $$= \frac{1}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}}\cdot(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}}$$

Rechenregeln für komplex konjugierte Zahlen:

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

Wahrheitstafel

a,b sind Aussagen
0 = falsch, 1 = wahr

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \oplus b$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	0

Elementare Mengenlehre:

A, B, C und M sind Mengen
Es gelten folgende Zusammenhänge:

- $A \cap B = B \cap A \quad A \cup B = B \cup A$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- De Morgan'sche Regeln:

  $\overline{A} = M \setminus A$ und $\overline{B} = M \setminus B$

  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ und $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

  $\overline{A \cup B} = M \setminus (A \cup B)$

  $\overline{A} \cap \overline{B} = M \setminus A \cap M \setminus B$

Relationen

- Inverse Relation:
  Sei $R \subseteq A \times B$ eine Relation. Dann ist $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\} \subseteq B \times A$ die zu R inverse Relation

Verkettung von Relationen:

$$R \circ S = \{(a,c) \mid \exists\, b \in B \text{ mit } (a,b) \in R \text{ und } (b,c) \in S\}$$

Seien $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ Relationen, dann ist

die Verkettung von R mit S.

- Sei $R \subseteq A \times A$ eine Relation. Dann ist R
  - **reflexiv**, wenn $(a,a) \in R$ für alle $a \in A$
  - **symmetrisch**, wenn für alle $a,b \in A$ gilt: $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$
  - **antisymmetrisch**, wenn für alle $a,b \in A$ gilt:
    $(a,b) \in R$ und $(b,a) \in R \Rightarrow a=b$
    (d.h.: $a \neq b \Rightarrow ((a,b) \notin R$ (exklusiv) oder $(b,a) \notin R))$
  - **asymmetrisch**, wenn für alle $a,b \in A$ gilt: $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R$
  - **transitiv**, wenn für alle $a,b \in A$ gilt: $(a,b) \in R$ und $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$

- Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt Äquivalenzrelation, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
- Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt Ordnung, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.
- Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt strikte Ordnung, wenn sie asymmetrisch und transitiv ist.

Funktionen

- Verkettung von Funktionen

  $$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

- Umkehrfunktion oder inverse Funktion

  $$f(x) = y \quad f^{-1}(y) = x \quad \text{mit}$$
  $$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{und} \quad (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y$$

Polynome

- „p-q-Formel“:

  $$x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Exponential- und Logarithmusfunktion

$$\mathrm{a} = \mathrm{b}^{\mathrm{x}} \Leftrightarrow \log_{\mathrm{b}} \mathrm{a} = \mathrm{x} \quad \forall\, \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{R}^{+} \wedge \mathrm{b} \neq 1 \wedge \mathrm{a}, \mathrm{b} > 0$$

$$\log_{\mathrm{b}} 1 = 0 \,(\text{wegen } \mathrm{b}^0 = 1) \text{ und } \log_{\mathrm{b}} \mathrm{b} = 1\, \forall \mathrm{b} > 0$$

$$\log_{\mathrm{b}}(\mathrm{x} \cdot \mathrm{y}) = \log_{\mathrm{b}} \mathrm{x} + \log_{\mathrm{b}} \mathrm{y}$$

$$\log_{\mathrm{b}}\left(\tfrac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}\right) = \log_{\mathrm{b}} \mathrm{x} - \log_{\mathrm{b}} \mathrm{y}$$

$$\log_{\mathrm{b}}(\mathrm{x}^{\mathrm{n}}) = \mathrm{n} \log_{\mathrm{b}} \mathrm{x}$$

$$\log_b\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n} \log_b x$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

- **Eine wichtige Identität:**

  $$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \cdot \ln(a)}$$

Zinsrechnung:

1. Lineare Verzinsung (keine Zinseszinsen) wegen Entnahme der Zinserträge
   Das Startkapital K_0 verzinst mit dem Zinssatz *i (in Prozent)* erhöht sich in *n* Perioden auf das Endkapital K_n: $K_n = K_0 + n \cdot K_0 \cdot i = K_0(1 + n \cdot i)$

2. Mit Wiederanlage der Zinserträge (Zinseszinsrechnung)
   Das Startkapital K_0 verzinst mit dem Zinssatz *i (in Prozent)* erhöht sich in *n* Perioden auf das Endkapital K_n.: $K_n = K_0(1 + i)^n$

3. Rentenbarwertfaktor (RBF) und Annuitätenfaktor (ANF) bei nachschüssiger Zahlung
   Endliche Rente (*n* Perioden): $K = a \times RBF$ $\quad a = K \times 1/RBF = K \times ANF$

Sparkassenformel:

$$RBF = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \qquad ANF = \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}$$

$$\mathrm{K}_{\mathrm{n(Gesamt)}} = \mathrm{K}_0 \cdot (1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}} + \mathrm{a} \frac{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}} - 1}{(1+\mathrm{i}) - 1}$$

Differenzialrechnung

Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen:
Wenn f und g Funktionen sind mit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, dann gilt:

- $\lim\limits_{x \to x_0} c \cdot f(x) = a \quad \forall c \in R$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = a \cdot b$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b} \qquad \text{falls}\, b \neq 0$

Asymptotik elementarer Funktionen:

- $\lim\limits_{x \to \infty} x^a = \infty \qquad \forall a > 0$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^a} = 0 \qquad \forall a > 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = (-1)^n \infty \quad \forall n \in N$
- $\lim\limits_{x \to \infty} e^{ax} = \infty \quad \lim\limits_{x \to -\infty} e^{ax} = 0 \quad \forall a > 0$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \ln(x) = \infty \quad \lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

Differenzierbarkeit einer Funktion an der Stelle x :

Der Grenzwert $\dfrac{df}{dx}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ muss existieren.

Ableitungen einiger elementarer Funktionen:

Funktion $f(x)$	Ableitungsfunktion $f'(x)$
c (Konstante)	0
x^n	$nx^{n-1} \quad n \in Z$
x^a	$ax^{a-1} \quad x > 0, a \in R$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)} \quad a \neq 1, a > 0$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln(a) \quad a > 0$
e^x	e^x
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Rechenregeln für Ableitungen:
(Folgende Regeln gehen davon aus, dass die Funktionen f und g zumindest an der Stelle x differenzierbar sind. c ist eine Konstante. Ferner wird davon ausgegangen, dass auch $f \cdot g, f/g$ und $f \circ g$ differenzierbar sind.)

Regelname	Regel
Linearität	$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$
Summenregel	$(g \pm f)'(x) = g'(x) \pm f'(x)$
Produktregel	$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\left(f/g\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
Kettenregel	$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Kurvendiskussion

Monotonie einer Funktion und Vorzeichen der Ableitungen:
Sei $f: D \to R$ differenzierbar in dem Intervall $I \subseteq D$. Dann gilt:

- $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ $\Leftrightarrow f$ ist monoton wachsend auf I,
- $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$ $\Leftrightarrow f$ ist monoton fallend auf I,
- $f'(x) > 0$ bis auf endlich viele $x \in I$ $\Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend auf I,
- $f'(x) < 0$ bis auf endlich viele $x \in I$ $\Rightarrow f$ ist streng monoton fallend auf I.

Krümmungsverhalten einer Funktion und Vorzeichen der 2. Ableitung:
Sei $f: D \to R$ zweimal differenzierbar in dem Intervall $I \subseteq D$. Dann gilt:

- $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ $\Leftrightarrow f$ ist konvex auf I,
- $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$ $\Leftrightarrow f$ ist konkav auf I.

Einfache Kriterien für (lokale) Maxima/Minima:
Eine Funktion $f: D \to R$ eine zweimal differenzierbare Funktion in dem offenen Intervall (a,b).
Dann gilt für $x_0 \in (a,b)$

- Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ so hat f bei x_0 ein lokales Minimum.
- Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ so hat f bei x_0 ein lokales Maximum.

Gilt dagegen $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ kann ein Wendepunkt oder ein Sattelpunkt vorliegen oder doch einen Extrempunkt. Aufschluss darüber gibt nur die Untersuchung der höheren Ableitungen.

Kriterien für Wendepunkte:
Eine Funktion $f: D \to R$ eine dreimal differenzierbare Funktion in dem offenen Intervall (a,b).
Dann gilt für $x_0 \in (a,b)$

- Ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ so hat f bei x_0 einen **Wendepunkt**.
- Gilt zusätzlich noch $f'(x_0) = 0$, so wird der Wendepunkt **Sattelpunkt** genannt.

Wieder gilt, dass $f'''(x_0) = 0$ die Untersuchung höherer Ableitungen verlangt.

Allgemeine Kriterien für (lokale) Maxima/Minima und Sattelpunkte:
Eine Funktion $f: D \to R$ sei n-mal differenzierbar in dem offenen Intervall (a,b). Es sei $x_0 \in (a,b)$, $f'(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0)$ die erste Ableitung, die an der Stelle x_0 nicht gleich Null wird, dann gilt:

- Ist n gerade, so hat f bei x_0 ein lokales Minimum (falls $f^{(n)}(x_0) > 0$) bzw. ein Maximum (falls $f^{(n)}(x_0) < 0$).
- Ist n ungerade, so hat f bei x_0 einen Sattelpunkt.

Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Integralrechnung

Stammfunktionen einiger elementarer Funktionen

Stammfunktion $F(x)$	Funktion $f(x)$	Ableitungsfunktion $f'(x)$
$c \cdot x$	c (Konstante)	0
$\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad n \in Z, n \neq -1$	x^n	$nx^{n-1} \quad n \in Z$
$\frac{x^{a+1}}{a+1} \quad a \in R, a \neq -1$	x^a	$ax^{a-1} \quad x > 0, a \in R$
$\ln(\lvert x \rvert)$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{a^x}{\ln(a)} \quad a \in R, a > 0$	a^x	$a^x \ln(a) \quad a > 0$
e^x	e^x	e^x
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Summenregel und Linearität:
Es seien $f, g : I \to R$ Funktionen. Dann gilt:

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx,$$

Da das auch bedeutet:

$$\int (f(x) + f(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int f(x)\, dx$$

gilt ebenfalls:

$$\int (k \cdot f(x))\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx \text{ für } k \in R.$$

Partielle Integration:

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

Integration durch Substitution:

$$\int f(g(x)) g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$

Substituiert wurde $g(x) = u$.
Etwas ausführlicher:

$$\int \underbrace{f(g(x))}_{f(u)} g'(x) \underbrace{dx}_{\frac{du}{g'(x)}} = \int f(u) g'(x) \frac{du}{g'(x)} = \int f(u)\, du$$

Ein Beispiel:

$$\int e^{2x} \cdot 2\, dx \underset{2x=u,\, dx=\frac{1}{2}du}{=} \int e^u \cdot 2\, \frac{1}{2}\, du = \int e^u\, du = e^u \underset{2x=u}{=} e^{2x}$$