VL Logik-Vertiefung WS 2020/2021

Aufgabenblatt 5 **Abgabedatum: 25.01.2021, 14:00 Uhr**

Aufgabe 1 (Strukturen und Belegungen)

Sei L_0 die prädikatenlogische Sprache, deren Vokabular die Prädikatkonstanten 'p_0^1', 'p_1^1' und 'p_0^2', sowie die Individuenkonstanten 'k_0','k_1' und 'k_2' enthält.

a) Gegeben sei eine L_0-Struktur $\langle M_1, I_1\rangle$ mit:
$M_1 = \{\text{Sokrates}, \text{Berlin}, \text{Frankfurt}\}$
$I_1(\text{'}k_0\text{'}) = \text{Sokrates}$
$I_1(\text{'}k_1\text{'}) = \text{Berlin}$
$I_1(\text{'}k_2\text{'}) = \text{Frankfurt}$
$I_1(\text{'}p_0^1\text{'}) = \{\text{Sokrates}\}$
$I_1(\text{'}p_1^1\text{'}) = \{\text{Berlin}, \text{Frankfurt}\}$
$I_1(\text{'}p_0^2\text{'}) = \{\langle\text{Sokrates}, \text{Berlin}\rangle\}$

Geben Sie jeweils eine M_1-Belegung β_1 an, sodass gilt:

(*i*) $\langle M_1, I_1\rangle, \beta_1 \not\models v_2 = k_2$
(*ii*) $\langle M_1, I_1\rangle, \beta_1 \models \forall v_3\,(p_0^1 v_3 \lor p_1^1 v_3)$
(*iii*) $\langle M_1, I_1\rangle, \beta_1 \models \exists v_1\, p_0^2 v_0 v_1$

b) Sei $\langle M_1, I_1\rangle$ die L_0-Struktur aus Teilaufgabe a). Werten Sie die folgenden Sätze analog zu Beispiel 3.8 im Skript so weit wie möglich aus:

(*i*) $\langle M_1, I_1\rangle, \beta \models \exists v_0\,\big(p_0^1 v_0 \land \forall v_1\,(p_0^1 v_1 \to v_1 = v_0)\big)$
(*ii*) $\langle M_1, I_1\rangle, \beta \models \big(v_3 \neq k_1 \leftrightarrow \forall v_3\,(p_1^1 k_1 \lor p_0^2 v_3 k_0)\big)$

c) Sei L_1 die prädikatenlogische Sprache, deren Vokabular die Prädikatkonstanten 'p_0^1' und 'p_0^2', und die Individuenkonstanten 'k_0','k_1' und 'k_2' enthält. Geben Sie jeweils eine L_1-Struktur $\langle M_2, I_2\rangle$ und eine M_2-Belegung β_2 an, sodass gilt:

(*i*) $\langle M_2, I_2\rangle, \beta_2 \models \neg(p_0^2 k_1 k_3 \lor p_0^1 k_2)$
(*ii*) $\langle M_2, I_2\rangle, \beta_2 \models \exists v_0\,(p_0^2 v_0 v_0 \leftrightarrow v_0 \neq k_1)$
(*iii*) $\langle M_2, I_2\rangle, \beta_2 \models \forall v_0 \forall v_1\,\big((p_0^1 v_0 \land p_0^1 v_1) \to p_0^2 v_0 v_1\big)$

Anmerkung: Wie auf den Folien von Lerneinheit 5 angemerkt, sind die in den folgenden beiden Aufgaben verwendeten Prädikat- und Individuenkonstanten stenggenommen keine legitimen Bestandteile unserer prädikatenlogischen Sprachen. Nachdem wir in Aufgabe 1 in dieser Hinsicht regelkonform waren, erlauben wir uns diese Abweichung aber, um mit weniger Indizes arbeiten zu müssen.

Aufgabe 2 (Logische Wahrheit (oder nicht))

Sei L die prädikatenlogische Sprache, deren Vokabular die Prädikatkonstanten 'S' und 'Q^3', sowie die Individuenkonstanten 'a' und 'b' enthält. Zeigen Sie die folgenden Sätze jeweils mit einem strengen Argument:

a) $\vDash_L (\forall v_0\, Q^3 v_0 b v_0 \rightarrow Q^3 aba)$
b) $\vDash_L \neg\forall v_0\, v_0 \neq v_0$
c) $\nvDash_L \forall v_0 \forall v_1 \big((Sv_0 \wedge Sv_1) \rightarrow v_0 = v_1\big)$

Aufgabe 3 (Logische Folgerung (oder nicht))

Sei L die prädikatenlogische Sprache, deren Vokabular die Prädikatkonstanten 'S' und 'Q', sowie die Individuenkonstanten 'a' und 'b' enthält.
Zeigen Sie jeweils mit einem strengen Argument:
a) $\{\text{'}(Sv_0 \vee Qv_0)\text{'}\} \vDash_L \forall v_0\, (Sv_0 \vee Qv_0)$
b) $\{\text{'}Sa\text{'}, \text{'}Sb\text{'}\} \vDash_L \big(Qa \vee (Sa \wedge Sb)\big)$
c) $\{\text{'}\forall v_0(Sb \rightarrow Qv_0)\text{'}, \text{'}Qa\text{'}\} \nvDash_L Sb$

Aufgabe 4 (Induktive Definitionen und logische Folgerung)

Sei L die prädikatenlogische Sprache, die als einziges Prädikat 'p_0^1' und keine Individuenkonstanten enthält.
Wir definieren zunächst induktiv das Prädikat „x ist eine $\mathbb{M}$-Trägermenge“:

1. $\{\emptyset\}$ ist eine $\mathbb{M}$-Trägermenge.
2. $\forall x$(x ist eine $\mathbb{M}$-Trägermenge $\Rightarrow$ $x \cup \{x\}$ ist eine $\mathbb{M}$-Trägermenge).
3. Nichts sonst ist eine $\mathbb{M}$-Trägermenge.

Ebenso definieren wir induktiv das Prädikat „x ist eine $\mathbb{I}$-Interpretationsfunktion“:

1. $\{\langle \text{'}p_0^1\text{'}, \{\emptyset\}\rangle\}$ ist eine $\mathbb{I}$-Interpretationsfunktion.
2. $\forall x$($\{\langle \text{'}p_0^1\text{'}, x\rangle\}$ ist eine $\mathbb{I}$-Interpretationsfunktion
   $\Rightarrow$ $\{\langle \text{'}p_0^1\text{'}, x \cup \{x\}\rangle\}$ ist eine $\mathbb{I}$-Interpretationsfunktion).
3. Nichts sonst ist eine $\mathbb{I}$-Interpretationsfunktion.

a) Definieren Sie $\mathfrak{M}$, die Menge aller $\mathbb{M}$-Trägermengen, und $\mathfrak{I}$, die Menge aller $\mathbb{I}$-Interpretationsfunktionen, jeweils explizit.

b) Geben Sie eine L-Struktur $\langle M_0, I_0 \rangle$ mit $M_0 \in \mathfrak{M}$ und $I_0 \in \mathfrak{I}$ an, sodass gilt:

$$\langle M_0, I_0 \rangle \not\models \forall v_0\, p_0^1 v_0$$

c) Geben Sie zu $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{I}$ das jeweilige Minimalitätsprinzip an. (Diese müssen *nicht* mit einem strengen Argument gezeigt werden. Sie dürfen jedoch in der nächsten Teilaufgabe verwendet werden.)

d) Zeigen Sie den folgenden Satz mit einem strengen Argument:

$$\forall\!\!\!\forall M \left(M \in \mathfrak{M} \Rightarrow \exists I (I \in \mathfrak{I} \mathbin{/\!\!\!\wedge} \langle M, I \rangle \models \forall v_0\, p_0^1 v_0) \right)$$

Für diese Teilaufgabe kann der Rückgriff auf eines der beiden Minimalitätsprinzipien von Nutzen sein.