VL Logik-Vertiefung WS 2020/2021

Aufgabenblatt 4 **Abgabedatum: 11.01.2021, 14:00 Uhr**

Aufgabe 1 (Belegungen und Boolesche Fortsetzungen)

Betrachten Sie die folgenden $\mathcal{L}_{AL}$-Formeln. Geben Sie zu jeder Formel φ jeweils eine Belegung f_1 und eine Belegung f_2 an, sodass gilt:
$\text{Wert}_{f_1}(\varphi) = 1$ und $\text{Wert}_{f_2}(\varphi) = 0$.
Sollte es zu einem der beiden Fälle kein passendes f_1 oder f_2 geben, dann begründen Sie kurz, wie Sie das festgestellt haben. (Ein ausführliches strenges Argument ist an dieser Stelle nicht gefordert.)

a) 'p_0'
b) '$(p_0 \to p_0)$'
c) '$\neg(p_0 \leftrightarrow p_0)$'
d) '$(p_0 \to (p_1 \to p_0))$'
e) '$\neg(p_0 \lor \neg p_1)$'
f) '$(\neg p_0 \leftrightarrow ((\neg p_1 \lor p_0) \land p_1))$'

Aufgabe 2 (Logische Wahrheit (oder nicht))

Zeigen Sie die folgenden Sätze jeweils mit einem strengen Argument:

a) $\vDash (p_0 \to p_0)$
b) $\vDash (\neg(p_0 \lor p_1) \to \neg p_0)$
c) $\nvDash (p_0 \lor (\neg p_0 \land p_1))$
d) $\nvDash (p_0 \leftrightarrow (p_1 \to p_2))$

Aufgabe 3 (Logische Folgerung (oder nicht))

Zeigen Sie die folgenden Sätze jeweils mit einem strengen Argument:

a) $\{`p_0'\} \vDash (p_0 \lor p_0)$
b) $\{`p_0', `p_1'\} \vDash (p_0 \leftrightarrow p_1)$
c) $\{`\neg p_0', `(p_0 \to p_1)'\} \nvDash \neg p_1$
d) $\{`(p_0 \land p_1)'\} \nvDash (p_2 \to \neg p_3)$

Aufgabe 4 (Induktive Definitionen und logische Folgerung)

Wir definieren zunächst induktiv das Prädikat 'x ist eine P-Formel':

1. 'p_0' ist eine P-Formel.
2. $\forall\varphi(\varphi$ ist eine P-Formel $\Rightarrow \ulcorner(\varphi \wedge p_0)\urcorner$ ist eine P-Formel$)$.
3. Nichts sonst ist eine P-Formel.

a) Definieren Sie Π, die Menge aller P-Formeln, explizit.

b) Zeigen Sie das zu Π passende Minimalitätsprinzip mit einem strengen Argument.

c) Zeigen Sie unter Rückgriff auf das Minimalitätsprinzip, dass folgender Satz gilt:

$$\forall x(x \in \Pi \Rightarrow \{\text{'}p_0\text{'}\} \vDash x).$$

Es bietet sich hierfür an, mit dem Minimalitätsprinzip aus Aufgabenteil b) zu arbeiten und zunächst zu zeigen, dass Π Teilmenge folgender Menge ist:

$$\Pi \cap \{x \mid \{\text{'}p_0\text{'}\} \vDash x\}$$