VL Logik-Vertiefung WS 2020/2021

Aufgabenblatt 3 **Abgabedatum: 23.12.2020, 14:00 Uhr**

Aufgabe 1 (Induktive Term-Definitionen)

Sei L die prädikatenlogische Sprache, deren Vokabular genau eine Individuenkonstante 'k_0' und genau ein zweistelliges Funktionszeichen 'f_0^2' enthält. Nun folgt eine induktive Definition des Prädikats 'ist ein L-Term':

1. 'k_0' ist ein L-Term.
2. $\forall x$ (x ist eine Variable $\Rightarrow$ x ist ein L-Term).
3. $\forall x \forall y$ (x ist ein L-Term $/\!\!\wedge$ y ist ein L-Term $\Rightarrow$ 'f_0^2'$^\frown x^\frown y$ ist ein L-Term).
4. Nichts sonst ist ein L-Term.

a) Geben Sie eine explizite Definition von T_L, der Menge der L-Terme, an.

b) Zeigen Sie die folgenden Sätze jeweils mit einem strengen Argument:

   (*i*) 'k_0' $\in T_L$.
   (*ii*) $\forall x$ (x ist eine Variable $\Rightarrow x \in T_L$).
   (*iii*) $\forall x \forall y$ ($x \in T_L$ $/\!\!\wedge$ $y \in T_L \Rightarrow$ 'f_0^2'$^\frown x^\frown y \in T_L$).

c) Formulieren Sie ein Minimalitätsprinzip für T_L und zeigen Sie dieses unter Rückgriff auf die explizite Definition mit einem strengen Argument.

Aufgabe 2 (Zahlen)

Finden Sie induktive Definitionen für $\mathbb{Z}$ (die ganzen Zahlen) und $\mathbb{N}_{gerade}$ (die geraden positiven Zahlen), wobei Sie für die Definition von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}_{gerade}$ auf die explizite Definition von $\mathbb{N}$ zurückgreifen können.

Zur Erinnerung eine induktive Definition für die natürlichen Zahlen:

1. 0 ist eine natürliche Zahl.
2. $\forall x$ (x ist eine natürliche Zahl $\Rightarrow x + 1$ ist eine natürliche Zahl).
3. Nichts sonst ist eine natürliche Zahl.

Sie dürfen die natürlichen Zahlen und Funktionen auf ihnen in gewohnter Weise verwenden $(0, 1, \ldots, +, -, \cdot, :, \ldots)$

Aufgabe 3 (Strenges Argumentieren mit $\mathbb{N}$)

In der Vorlesung wurde die folgende explizite Definition für $\mathbb{N}$ angegeben:

$$\mathbb{N} := \{x \mid \forall Y \big((\emptyset \in Y \mathbin{/\!\!\!\wedge} \forall z\,(z \in Y \Rightarrow z \cup \{z\} \in Y)) \Rightarrow x \in Y\big)\}.$$

Zeigen Sie den folgenden Satz mit einem strengen Argument:

$$\forall x \Big(x \in \mathbb{N} \Rightarrow \big(x = \emptyset \mathbin{\backslash\!\!\!\vee} \exists y(y \in \mathbb{N} \mathbin{/\!\!\!\wedge} x = y \cup \{y\})\big)\Big).$$

Aufgabe 4 (Strenges Argumentieren mit $Fm_{\mathcal{L}_{AL}}$ I)

Es gelte Folgendes für beliebige Mengen X:

$$\begin{aligned}\Gamma(X) :\Leftrightarrow\, & \forall x\,\big(x \text{ ist eine Satzkonstante } \Rightarrow x \in X) \\ & \mathbin{/\!\!\!\wedge} \forall x\,(x \in X \Rightarrow \ulcorner\neg x\urcorner \in X) \\ & \mathbin{/\!\!\!\wedge} \forall x \forall y\,(x \in X \mathbin{/\!\!\!\wedge} y \in X) \Rightarrow \ulcorner(x \to y)\urcorner \in X\big).\end{aligned}$$

Zeigen Sie mit einem strengen Argument, dass Folgendes gilt:

$$\begin{aligned}&\forall x \forall z\,\big(x \in \{y \mid \forall X\,(\Gamma(X) \Rightarrow y \in X)\} \mathbin{/\!\!\!\wedge} z \in \{y \mid \forall X\,(\Gamma(X) \Rightarrow y \in X)\} \\ &\Rightarrow \ulcorner(x \to z)\urcorner \in \{y \mid \forall X\,(\Gamma(X) \Rightarrow y \in X)\}\big).\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (Strenges Argumentieren mit $Fm_{\mathcal{L}_{AL}}$ II)

Es gelte Folgendes, wobei x beliebig ist:

$$\begin{aligned}\gamma(x) :\Leftrightarrow\, & x \text{ ist eine Satzkonstante} \\ & \mathbin{\backslash\!\!\!\vee} \exists y\,(y \in Fm_{\mathcal{L}_{AL}} \mathbin{/\!\!\!\wedge} \ulcorner\neg y\urcorner = x) \\ & \mathbin{\backslash\!\!\!\vee} \exists y \exists z\,((y \in Fm_{\mathcal{L}_{AL}} \mathbin{/\!\!\!\wedge} z \in Fm_{\mathcal{L}_{AL}}) \mathbin{/\!\!\!\wedge} \ulcorner(y \to z)\urcorner = x).\end{aligned}$$

Zeigen sie folgenden Satz mit einem strengen Argument:

$$\{x \mid \gamma(x)\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}_{AL}}.$$

Aufgabe 6 (Strenges Argumentieren mit $Fm_{\mathcal{L}_{AL}}$ III)

Wir definieren zunächst induktiv das Prädikat 'x kommt vor in y':

1. $\forall x\,(x \in SK_{\mathcal{L}_{AL}} \Rightarrow x$ kommt vor in $x)$.
2. $\forall x \forall y\,(x$ kommt vor in $y \Rightarrow x$ kommt vor in $\ulcorner\neg y\urcorner)$.
3. $\forall x \forall y \forall z\,\big(y \in Fm_{\mathcal{L}_{AL}} \mathbin{/\!\!\!\wedge} z \in Fm_{\mathcal{L}_{AL}} \mathbin{/\!\!\!\wedge} (x$ kommt vor in $y \mathbin{\backslash\!\!\!\vee} x$ kommt vor in $z)$ $\Rightarrow x$ kommt vor in $\ulcorner(y \to z)\urcorner\big)$.
4. Für keine anderen x und y gilt: x kommt vor in y.

Zeigen Sie:

$$\forall x\,\big(x \in FM_{\mathcal{L}_{AL}} \Rightarrow \exists y(y \in SK_{\mathcal{L}_{AL}} \mathbin{/\!\!\!\wedge} y \text{ kommt vor in } x)\big).$$

Benutzen Sie dabei nicht Satz 1.93 (das Induktionsprinzip), sondern setzen Sie Satz 1.86.4 ein.