VL LOGIK VERTIEFUNG WS 2020/2021

Aufgabenblatt 2 **Abgabedatum: 07.12.2012, 14:00 Uhr**

Aufgabe 1 (Funktionen I)

Gegeben seien die Mengen $A := \{3, 5, 7\}$ und $B := \{a, b, c, d\}$. Geben Sie an, ob es sich bei folgenden Mengen um Funktionen von A nach B handelt. Begründungen sind nicht verlangt.

a) $\{\langle 3, c\rangle, \langle 5, d\rangle, \langle 7, b\rangle\}$,
b) $\{\langle 5, b\rangle, \langle 3, a\rangle, \langle 7, d\rangle, \langle 3, a\rangle\}$,
c) $\{\langle 5, a\rangle, \langle 3, b\rangle\}$,
d) $\{\langle 3, b\rangle, \langle 5, d\rangle, \langle 7, c\rangle, \langle 1, a\rangle\}$,
e) $\{\langle 7, a\rangle, \langle 5, d\rangle, \langle 3, d\rangle, \langle 7, b\rangle\}$,
f) $\emptyset$.

Aufgabe 2 (Funktionen II)

Wir definieren in den folgenden Teilaufgaben jeweils eine Funktion f und zwei Mengen A und B. Entscheiden Sie für jeden dieser Fälle, welche der Aussagen 'f ist eine Injektion von A nach B', 'f ist eine Surjektion von A nach B' und 'f ist eine Bijektion von A nach B' zutreffen. Begründungen sind nicht verlangt.

a) $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\},\ f(x) = x$ für alle $x \in \{1, 2, 3\}$,
$A := \{1, 2, 3\}$,
$B := \{1, 2, 3\}$.

b) $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\},\ f(x) = 1$ für alle $x \in \{1, 2, 3\}$,
$A := \{1, 2, 3\}$,
$B := \{1, 2, 3\}$.

c) $f := \{\langle \text{`}\neg\text{'}, \text{`nicht'}\rangle, \langle \text{`}\to\text{'}, \text{`wenn, dann'}\rangle, \langle \text{`}\wedge\text{'}, \text{`und'}\rangle\}$,
$A := \{\text{`}\neg\text{'}, \text{`}\to\text{'}, \text{`}\wedge\text{'}\}$,
$B := \{\text{`nicht'}, \text{`und'}, \text{`oder'}, \text{`wenn, dann'}, \text{`genau dann, wenn'}\}$.

d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{Z}$,
$A := \mathbb{Z}$,
$B := \mathbb{N}$.
($\mathbb{Z}$ soll die Menge der ganzen Zahlen sein, also $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, und $\mathbb{N}$ die der natürlichen Zahlen, also $\{0, 1, 2, \dots\}$.)

Aufgabe 3 (Strenges Argumentieren mit Funktionen I)

Hinweis: Im Folgenden steht 'A' für eine beliebige Menge.

a) Geben Sie eine Injektion $f : A \to \mathcal{P}(A)$ an.
b) Zeigen Sie mit einem strengen Argument, dass Ihre angegebene Funktion eine Injektion von A nach $\mathcal{P}(A)$ ist.

Aufgabe 4 (Strenges Argumentieren mit Funktionen II)

Zeigen Sie folgende Behauptungen jeweils mit einem strengen Argument:

a) $\{\langle 1, v\rangle\}$ ist eine Bijektion von $\{1\}$ nach $\{v\}$.
b) $\{\langle 1, v\rangle\}$ ist eine Surjektion von $\{1\}$ nach $\{v, w\} \Rightarrow v = w$.

Aufgabe 5 (Unendlichkeit)

Zeigen Sie folgende Behauptung mit einem strengen Argument:

> Die Menge $\{1\}$ ist *nicht* unendlich.

Verwenden Sie dabei folgende Aussage als Hilfssatz:

$$\exists x \exists y \; (x \in \mathbb{N} \mathbin{/\!\!\!\wedge} y \in \mathbb{N} \mathbin{/\!\!\!\wedge} x \neq y)$$