VL Logik Vertiefung WS 2020/2021

Aufgabenblatt 1 **Abgabedatum: 23.11.2020**

Aufgabe 1 (Mengen und Teilmengen)

a) Betrachten Sie die Menge $A := \{\{a, b, c\}, \text{Berlin}, \{17\}\}$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? (Es sind keine Begründungen verlangt.)

   (i) Berlin $\in A$.
   (ii) $17 \in A$.
   (iii) A hat genau zwei Teilmengen.
   (iv) A hat genau drei Elemente.
   (v) A hat genau fünf Elemente.
   (vi) $\{a, b, c\} \subseteq A$.
   (vii) $\{\{17\}\} \subseteq A$.
   ($viii$) $\emptyset \subseteq A$.
   (ix) $\{\{a, b, c\}, \text{Berlin}, \{17\}\} \subseteq A$.

b) Geben Sie alle Teilmengen der folgenden Mengen an:

   (i) $\{1, 2, 3\}$,
   (ii) $\{\{\{\emptyset\}\}\}$,
   (iii) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Aufgabe 2 (Strenges Argumentieren mit Mengen I)

Zeigen Sie jeweils mit einem strengen Argument, dass folgende Aussagen gelten:

a) $\forall x(x \in \{a\} \Rightarrow x = a)$,
b) $\{\emptyset\} \neq \{\{\emptyset\}\}$,
c) $\{a, b\} \subseteq \{b, a\}$,
d) $\{a, a, b\} \subseteq \{a, b\}$,
e) $\forall x \forall y \forall z((x \subseteq y \mathbin{/\!\!\wedge} y \subseteq z) \Rightarrow x \subseteq z)$,
f) $A = \{x \mid x \in A\}$.

Aufgabe 3 (Eine Menge Mengen)

a) Gegeben seien die Mengen $A := \{7, 3, 5, 2\}$ und $B := \{2, 4, 6\}$. Geben Sie die folgenden Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente an. (Vgl. Def. 1.3)

   (*i*) $A \cap B$
   (*ii*) $B \cup A$
   (*iii*) $A \cap A$
   (*iv*) $A \cup A$
   (*v*) $\emptyset \cap B$
   (*vi*) $B \cup \emptyset$
   (*vii*) $A \setminus \{x \mid x > 3\}$
   (*viii*) $A \setminus \{x \mid x \text{ ist eine ungerade Zahl}\}$
   (*ix*) $\mathcal{P}(A \setminus B)$
   (*x*) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$

b) Geben Sie bei (*i*) eine Menge C und bei (*ii*) und (*iii*) Mengen A und B an, damit die Sätze zu korrekten Aussagen werden. Eine Angabe passender Mengen genügt, weitere Begründungen sind nicht erforderlich.

   (*i*) $\{1, 3, 5\} \times \{3, 7\} = C$,
   (*ii*) $A \times B = \{\langle 5, 5\rangle, \langle 55, 555\rangle, \langle 55, 5\rangle, \langle 55, 5555\rangle, \langle 5, 5555\rangle, \langle 5, 555\rangle\}$,
   (*iii*) $\neg \mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Aufgabe 4 (Strenges Argumentieren mit Mengen II)

Zeigen Sie jeweils mit einem strengen Argument, dass folgende Aussagen für beliebige Mengen A, B und C gelten.

a) $A \subseteq A \cup B$
b) $(A \subseteq C \mathrel{/\!\!\!\wedge} B \subseteq C) \Rightarrow A \cup B \subseteq C$
c) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$
d) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$